



Université Paris Descartes
Laboratoire MAP5 UMR CNRS 8145
Ecole doctorale 386 : Sciences Mathématiques de Paris Centre

THÈSE
présentée pour obtenir le grade de
DOCTEUR DE L'UNIVERSITÉ PARIS DESCARTES

Spécialité : Mathématiques

Présentée par
Fanny Doré

**Convergences de structures linéaires dans les images :
modélisation stochastique et applications en imagerie médicale**

Soutenue le 8 juillet 2014 devant la commission d'examen composée de :

Agnès DESOLNEUX	ENS Cachan	Directrice de thèse
Isabelle BLOCH	Télécom Paris Tech	Rapporteuse
Pierre CALKA	Université de Rouen	Rapporteur
Julie DELON	Université Paris Descartes	Examinatrice
Serge MULLER	GE Healthcare	Examinateur
Alain TROUVÉ	ENS Cachan	Examinateur

Rapporteurs :

Isabelle BLOCH	Télécom Paris Tech
Pierre CALKA	Université de Rouen

Table des matières

1	Introduction	1
1.1	Introduction générale	1
1.1.1	Contexte médical	1
1.1.2	Méthodologie a contrario	2
1.2	Contributions	3
2	Etat de l'art	9
2.1	Détection de convergences globales	9
2.2	Détections de convergences locales	11
2.2.1	Méthodes de détection des lésions stellaires	11
2.2.2	Détection de motifs de convergence	13
2.2.3	Détection de jonctions	14
3	Détection de convergences globales	17
3.1	Modélisation de répartitions aléatoires des droites d'une image	18
3.1.1	Paramétrisation des droites	18
3.1.2	Modèle invariant par translation et rotation : Mesure de Poincaré	19
3.1.3	Modèle anisotrope : modélisation de convergences	19
3.2	Géométrie stochastique	22
3.2.1	Résultats sous la mesure de Poincaré	22
3.2.2	Pavage en régions équiprobables sous le modèle uniforme	23
3.2.3	Extension au cas d'un modèle gaussien	26
3.2.4	Etude asymptotique du modèle gaussien	32
3.3	Détection a contrario de convergences de droites dans le plan d'une image	43
3.3.1	Événements d'étude	43
3.3.2	Nombre de fausses alarmes, événements significatifs	43
3.4	Estimation de modèles anisotropes	44
3.4.1	Type de modèle cherché	44
3.4.2	Estimation du point de convergence globale	45
3.4.3	Estimation du poids et de la variance	47
3.5	Exemples	49
3.5.1	Exemples synthétiques	50
3.5.2	Expériences sur des mammographies	50
3.5.3	Expériences sur des images naturelles	53
4	Détection de convergences locales	59
4.1	Passage des droites aux segments	60
4.1.1	Paramétrisation des segments	60

4.1.2	Comparaison modèle uniforme sur les droites, modèle uni- forme sur les segments	62
4.2	Détection a contrario de convergences de segments	64
4.2.1	Modélisation des convergences	64
4.2.2	Expression du nombre de fausses alarmes	64
4.2.3	Majoration de l'espérance du nombre d'événements significatifs	66
4.2.4	Comparaison des nombres de fausses alarmes avec ou sans contexte	70
4.2.5	Modèles a contrario	72
4.2.6	Calcul théorique et numérique du nombre de fausses alarmes	81
4.3	Expériences	83
4.3.1	Exemples synthétiques	83
4.3.2	Estimation d'un modèle de mélange	90
4.3.3	Expériences sur des mammographies	91
4.3.4	Expériences sur des images naturelles	95
5	Un autre nombre de fausses alarmes	99
5.1	Nombre de fausses alarmes	99
5.1.1	Calcul numérique du nombre de fausses alarmes sous le modèle uniforme	100
5.1.2	Calcul du nombre de fausses alarmes contre le modèle gaussien	101
5.2	Comparaison des nombres de fausses alarmes	104
6	Conclusions et perspectives	109
	Bibliographie	113

Introduction

Sommaire

1.1 Introduction générale	1
1.1.1 Contexte médical	1
1.1.2 Méthodologie a contrario	2
1.2 Contributions	3

1.1 Introduction générale

1.1.1 Contexte médical

Le cancer du sein est le second cancer le plus meurtrier chez les femmes. A ce jour la détection précoce d'un cancer est la meilleure méthode de prévention, c'est pourquoi les techniques d'imagerie médicale, et notamment la mammographie, sont largement utilisées. Cependant des radiologues différents n'auront pas systématiquement la même interprétation d'une mammographie à cause notamment de la grande variabilité de celles-ci ainsi que de la superposition de tissus sains et des signes d'un cancer.

C'est pourquoi les méthodes d'aide au diagnostic sont développées. Elles permettent notamment d'indiquer au radiologue les zones suspectes nécessitant une double lecture.

Les cancers du sein se caractérisent par différents symptômes. Parmi ces symptômes les lésions stellaires et distorsions architecturales doivent être sérieusement examinées car elles sont le signe de tumeurs malignes. Elles se caractérisent par une organisation radiale des spicules (structures linéaires normalement présentes dans le sein) autour d'un centre dense (pour les lésions stellaires) et en l'absence d'un centre dense pour les distorsions architecturales. Pour les détecter le motif stellaire est un indice majeur utilisé dans beaucoup de travaux existants ([3], [19], [49]). La taille de ces lésions est variable, les méthodes de détections doivent donc privilégier les approches multi-échelles.

Les lésions stellaires sont donc souvent modélisées par des zones de convergences locales, où l'orientation des spicules, ou des pixels, est dirigée vers un point unique. Dans ces zones l'histogramme de l'orientation des spicules est relativement plat. Dans les zones saines on observe que l'orientation varie peu, car les spicules suivent une orientation privilégiée et globale vers le tétou.

Le contexte général de la détection des lésions stellaires est donc celui des convergences locales dans une image où les structures linéaires suivent un modèle de fond : on observe que les spicules sont normalement organisées en chaînes de longueurs variables, qui semblent converger vers le tétou. Cette idée a notamment été utilisée afin de détecter le tétou sur une mammographie ([31]). Les convergences locales que représentent les lésions stellaires surviennent donc dans un cadre où une orientation globale est privilégiée. La détection de cette convergence globale permet donc de mieux discerner les mammographies normales des mammographies présentant des convergences locales.

1.1.2 Méthodologie a contrario

Les méthodes a contrario sont utilisées pour la détection d'objets dans les images. Elles consistent à modéliser ce que l'on veut détecter par des événements construits à partir d'objets élémentaires (par exemple les pixels munis de leur orientation pour la détection d'alignements [21]) et de définir un modèle de bruit sur ces objets élémentaires. Les événements observés ayant moins de ε chance d'apparaître sous le modèle de bruit sont dits ε -significatifs. Pour les sélectionner, on définit leur nombre de fausses alarmes, de sorte que si un événement est ε -significatif, son nombre de fausses alarmes est inférieur à ε . Le seuil ε a donc une vraie signification : c'est le nombre de fausses détections que l'on s'autorise. Ces méthodes ont déjà été utilisées dans le cadre de la détection d'objets dans des images ([1],[21],[13]) et en particulier pour la détection des lésions stellaires ([41]).

Le contenu de cette thèse porte essentiellement sur les convergences de structures linéaires (droites ou segments) dans les images. Il est donc crucial de pouvoir détecter droites et segments dans une image. Ceci est fait par le Line Segment Detector ([21]) qui est de plus une application de la méthodologie a contrario. L'algorithme que les auteurs proposent cumule l'efficacité en temps d'un détecteur de segment déjà existant et la validation fournie par le critère a contrario [15] : le seuil utilisé est le nombre de faux positifs que l'on s'autorise.

La première étape du Line Segment Detector (LSD) est une étape de croissance de région afin de regrouper les pixels qui ont une orientation similaire. L'orientation en chaque pixel est calculée comme étant la direction orthogonale au gradient en ce point. A partir d'un unique pixel on ajoute les pixels voisins (voisinage de 8 pixels) dont l'orientation est égale à celle de la région courante, à une certaine précision fixée et l'orientation moyenne de la région est mise à jour. Le processus s'arrête lorsqu'aucun pixel ne peut plus être ajouté à la région. Les régions sont initialisées avec les pixels dont l'amplitude du gradient est la plus élevée, car ils ont plus de chances d'appartenir à un segment. Cette étape permet de réduire de manière importante le nombre de segments potentiels.

Il s'ensuit une étape d'approximation de chaque région par un rectangle déterminé par son centre, son orientation, sa longueur et sa largeur. Chaque région est approchée par le rectangle dont le centre est le barycentre de tous les pixels de la région pondérés par la norme de leur gradient (de sorte que les points les mieux ob-

servés comptent plus). L'orientation est choisie dans la première direction d'inertie. La largeur et la longueur du rectangle sont alors choisies de sorte à ce qu'il recouvre la région concernée. En réalité plusieurs perturbations à partir du rectangle initial seront testées afin de garder la meilleure approximation.

La troisième étape est une étape de validation, fournie par un critère a contrario, qui sélectionne les segments les plus probables dans un certain sens que l'on va préciser. Pour cette étape on suppose que les orientations des gradients en chaque pixel sont indépendantes et uniformément distribuées (hypothèse H_0) comme le font les auteurs de [15] après avoir montré que c'était le cas des images de bruit blanc gaussien. Ce modèle caractérise bien les zones plates ou isotropes, ce qui n'est pas le cas des segments dans une image. Il est donc pertinent de valider les segments apparaissant comme des écarts au modèle de bruit. Sous ce modèle le nombre de pixels alignés $k(r)$ avec la direction du rectangle r contenant $n(r)$ pixels suit une binomiale $\mathcal{B}(n(r), p)$ où $p = \frac{\tau}{\pi}$ est la probabilité qu'un point ait la même orientation qu'un rectangle r à la précision τ près.

Le nombre de fausses alarmes d'un rectangle r s'écrit alors

$$\text{NFA}(r, u) = \#\mathcal{R} \mathbb{P}_{H_0}(k(r, U) \geq k(r, u)),$$

où r est un rectangle de l'image u et U est une image suivant l'hypothèse H_0 et $\#\mathcal{R}$ désigne le nombre de rectangles potentiels, c'est le nombre de tests. On accepte alors les rectangles r dont le nombre de fausses alarmes vérifie $\text{NFA}(r, u) \leq \varepsilon$.

Dans la pratique, on s'affranchit du paramètre ε en le fixant égal à 1, ce qui donne en moyenne un faux positif par image. De plus chaque rectangle est testé pour plusieurs précisions p , si pour une de ces précisions il est significatif, alors il est ajouté à la liste des rectangles détectés.

La complexité du LSD est proportionnelle au nombre de pixels dans l'image. Sans l'étape de croissance de régions, le nombre potentiel de segments aurait été N^4 où N est la taille de l'image, voire en N^5 si on prend en compte l'épaisseur du segment.

1.2 Contributions

La plupart des méthodes a contrario citées précédemment utilisent un modèle de bruit simple : indépendance et uniformité des objets élémentaires. Cela facilite le calcul de la probabilité intervenant dans le nombre de fausses alarmes. Les événements ε -significatifs sont les événements dont le nombre moyen d'occurrences sous le modèle de bruit est inférieur à ε . Ce sont les écarts au modèle de bruit. Si celui-ci est choisi uniforme, on détectera les événements ayant une faible probabilité d'apparaître sous le modèle uniforme. Quand on détecte les alignements dans une image avec une méthode a contrario il est raisonnable de supposer que ce qui n'est pas un alignement suit le modèle uniforme. C'est beaucoup moins raisonnable lorsqu'on cherche à détecter les lésions stellaires dans une mammographie. En effet, dans une zone saine d'une mammographie l'orientation des spicules n'est pas uniforme. Elles

ont une orientation privilégiée, qui ne varie pas beaucoup localement. En effet on observe dans une mammographie normale que les spicules "convergent" vers le tét-on. Cela est en contradiction avec le modèle uniforme. Dès lors l'utilisation de ce modèle peut donner lieu à des faux positifs. Cela se vérifie par l'expérience : contre le modèle uniforme la zone autour du tét-on apparaît souvent significative.

Inversement si le modèle a contrario ne caractérise pas bien ce qui est "normal", on risque de manquer des détections, ce qui dans le cas des lésions stellaires n'est pas envisageable.

Nous proposons dans la suite de ce manuscrit une étude théorique de la méthodologie a contrario pour la détection des convergences dans les images. Nous proposons d'autres modèles de bruit que le modèle uniforme, et nous comparons les détections d'événements significatifs sous chacun d'entre eux. Quand le cadre le permet nous proposons aussi plusieurs expressions du nombre de fausses alarmes afin d'étudier quelle peut être leur influence sur les événements détectés. Enfin nous introduisons une méthode générale d'enrichissement du modèle a contrario à partir du modèle uniforme.

Les modèles de bruit que nous définissons prennent en compte une convergence globale "normale" des structures linéaires afin d'améliorer les détections dans le cadre des mammographies. Nous proposons des formes paramétriques de modèles de mélange comprenant au moins deux termes : un terme uniforme et un terme de convergence.

Le Chapitre 2 est consacré aux travaux de détection des convergences globales et locales existants. La première section détaille la méthode de détection des points de fuite dans un cadre a contrario développée par Almansa et al. [1], et notamment le pavage du plan de l'image en une famille de régions équiprobables sous le modèle uniforme. La deuxième section traite des convergences locales. Deux types de convergences locales sont donnés : les lésions stellaires dont on détaille plusieurs méthodes de détection, dans un cadre a contrario ou non, et la détection des jonctions abordée dans le cadre a contrario, [51].

Dans le Chapitre 3 les objets d'étude sont les droites de l'image, et nous étudions les convergences globales dans les images. Nous avons choisi de les décrire par leurs coordonnées polaires (ρ, φ) et de modéliser leur répartition aléatoire par des mesures de probabilité de la forme :

$$d\mu_f = f(\rho, \varphi) d\rho d\varphi,$$

où f est une fonction positive continue, le modèle uniforme correspondant à prendre pour f la fonction constante égale à 1.

Nous définissons des modèles anisotropes, décrivant une convergence globale des droites vers un point M de coordonnées (x_M, y_M) qui utilisent des lois dérivées de la loi normale, de la forme :

$$d\mu_g = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(\rho - x_M \cos \varphi + y_M \sin \varphi)^2 / 2\sigma^2} d\rho d\varphi.$$

Nous rappelons les résultats de géométrie stochastique dans le cas de la loi uniforme, tels que les mesures des ensembles de droites qui intersectent un ou deux

convexes donnés, ainsi que la probabilité qu'une droite qui intersecte un convexe en rencontre un autre. Puis nous montrons comment ils se généralisent au modèle de convergence proposé. Ainsi nous avons montré le résultat suivant : étant donné un convexe K de fonction support p , la mesure sous μ_g de l'ensemble des droites qui intersectent K est :

$$\mu_g(D \cap K \neq \emptyset) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi \left(\frac{p(\varphi) - r_M \cos(\theta_M - \varphi)}{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{-p(\varphi + \pi) - r_M \cos(\theta_M - \varphi)}{\sigma} \right) d\varphi,$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite. Ce résultat est ensuite appliqué au convexe Ω (le domaine de l'image), ainsi qu'à chaque type de région du pavage du plan de l'image. On a également obtenu une généralisation de l'ensemble des droites intersectant deux convexes donnés K_1 et K_2 de fonctions support p_1 et p_2 respectivement :

$$\begin{aligned} \mu_g(D \cap K_1 \cap K_2 \neq \emptyset) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \mathbb{1}_{\{\alpha(\varphi) \leq \beta(\varphi)\}} \\ &\quad \left[\Phi \left(\frac{\beta(\varphi) - r_M \cos(\theta_M - \varphi)}{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{\alpha(\varphi) - r_M \cos(\theta_M - \varphi)}{\sigma} \right) \right] d\varphi, \end{aligned}$$

où les deux fonctions α et β sont définies par :

$$\begin{aligned} \alpha(\varphi) &= \max(-p_1(\varphi + \pi), -p_2(\varphi + \pi)) \\ \beta(\varphi) &= \min(p_1(\varphi), p_2(\varphi)). \end{aligned}$$

Ces deux résultats nous permettent de calculer sous la loi μ_g la probabilité qu'une droite de l'image intersecte n'importe quelle région test afin de tester la procédure a contrario contre ce nouveau modèle. Ils permettent aussi une étude asymptotique du modèle gaussien. Nous avons montré trois cas limites du modèle gaussien. Lorsque le paramètre σ tend vers $+\infty$, la loi μ_g tend vers la loi uniforme, au sens suivant : pour tout convexe borné K dans le plan

$$\frac{\mu_g(D \cap K \neq \emptyset)}{\mu_g(D \cap \Omega \neq \emptyset)} \xrightarrow{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\text{Per } K}{2\pi R_I} = \frac{\mu_1(D \cap K \neq \emptyset)}{\mu_1(D \cap \Omega \neq \emptyset)}.$$

A l'inverse quand la variance tend vers 0 la loi μ_g tend vers la distribution où toutes les droites passent par le point de convergence, ainsi, pour tout convexe borné et régulier (ie de fonction support différentiable) K dans le plan

$$\mu_{g_\sigma}(D \cap K \neq \emptyset) \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} \mu_h(D \cap K \neq \emptyset)$$

où la fonction h est définie par $h(\rho, \varphi) = \frac{1}{\pi} \delta_{\rho=r_M \cos(\theta_M - \varphi)}$.

La dernière étude asymptotique correspond à une convergence des droites à l'infini : on montre que la loi limite a pour support l'ensemble des droites de direction φ_0 correspondant à la direction du point de fuite.

La méthode a contrario est développée pour les deux modèles uniforme et gaussien. On construit aussi un modèle hybride comprenant un terme uniforme et un terme de convergence :

$$f_{p,\sigma}(\rho, \varphi) = \mathbb{1}_{\{D_{(\rho,\varphi)} \cap \Omega \neq \emptyset\}} \times \left[\frac{1-p}{\text{Per } \Omega} + \frac{p}{\pi \sqrt{2\pi} \sigma \mu_g(D \cap \Omega \neq \emptyset)} e^{-(\rho - x_M \cos \varphi + y_M \sin \varphi)^2 / 2\sigma^2} \right],$$

sur les droites de l'image, et les résultats sont comparés sur des images synthétiques, naturelles et sur des mammographies. Nous proposons finalement un algorithme d'estimation d'un modèle de mélange anisotrope qui prenne en compte la convergence globale principale des droites de l'image. Ce modèle est pour finir évalué sur des exemples synthétiques puis testé sur des mammographies.

Le Chapitre 4 traite des convergences locales : les objets d'étude sont les segments. Nous étudions dans un premier temps l'analogie droites/segments afin de voir comment les modèles définis sur les droites se transposent aux segments et inversement quels modèles sur les segments induisent une répartition uniforme de leurs droites support.

Plus précisément, nous montrons qu'il n'y a pas de bijection entre la loi des segments et la loi de leurs droites support, et en particulier que plusieurs lois sur les segments (dont la loi uniforme ne fait pas partie) induisent la loi uniforme sur les droites.

De nouveaux modèles portant sur l'orientation des segments et décrivant des convergences globales sont définis. Ils sont donnés sous la forme d'un mélange d'un terme uniforme et d'un terme de convergence globale portant uniquement sur l'orientation $\varphi(M)$ des segments par rapport à un point M fixé.

De nouveau nous donnons un algorithme pour l'estimation de tels mélanges, qui est basée sur la détection du point de convergence globale le plus "plausible", défini par exemple comme le point le plus significatif contre le modèle uniforme, puis sur l'estimation des paramètres par maximum de vraisemblance. Ces modèles sont ensuite agrégés avec d'autres modèles portant sur la position des segments et les modèles résultant sont testés dans le cadre de la méthodologie a contrario. Pour cela nous proposons de définir sur les couronnes $\mathcal{C}(\mathbf{x}, r, \alpha)$ modélisant les convergences locales, centrées en \mathbf{x} , de rayons r et αr , trois nombres de fausses alarmes, définis par :

$$\begin{aligned} \text{NFA}(\mathbf{x}, r, \alpha) &= N_T \mathbb{P}(K \geq K(\mathbf{x}, r, \alpha)) \\ \text{NFA}(\mathbf{x}, r, \alpha) &= N_T \mathbb{P}(K \geq K(\mathbf{x}, r, \alpha) | N = N(\mathbf{x}, r, \alpha)) \\ \text{NFA}(\mathbf{x}, r, \alpha) &= N_T \mathbb{P}(K \geq K(\mathbf{x}, r, \alpha), N \geq N(\mathbf{x}, r, \alpha)). \end{aligned}$$

Nous montrons en particulier que la majoration classique du nombre d'événements ε -significatifs avec le troisième nombre de fausses alarmes n'est pas valable et nous montrons qu'on en obtient une autre, moins forte : le nombre d'événements ε -significatifs est majoré par $\varepsilon(1 - \log \varepsilon)$.

Le Chapitre 5 traite de la détection de convergences locales et globales des segments d'une image mais dans un cadre différent de celui élaboré dans le Chapitre 4.

Etant donnée une image et ses N segments, on définit en tout point Q du domaine de l'image le nombre de fausses alarmes

$$\text{NFA}_f^{\sin}(Q) = N_T \mathbb{P}_f(V(Q) \leq v(Q)),$$

où on a défini la variable aléatoire $V(Q) = \sum_{n=1}^N \sin^2 \varphi_n(Q)$ et noté $v(Q)$ sa réalisation, avec $\varphi_n(Q)$ l'angle entre le n -ème segment et le point Q . Ce nouveau nombre de fausses alarmes permet la détection des convergences globales des segments ainsi que celle des convergences locales, en restreignant la somme à un voisinage du point Q . Le calcul numérique de la probabilité se fait en utilisant l'approximation gaussienne donnée par le théorème central limite, et nous montrons à cet égard que dans le cas du modèle uniforme, l'espérance et la variance de $\sin^2 \varphi(Q)$ pour tout point Q sont respectivement $\mathbb{E}_1(\sin^2 \varphi(Q)) = \frac{1}{2}$ et $\text{Var}_1(\sin^2 \varphi(Q)) = \frac{1}{8}$.

La détection des convergences locales contre ce modèle est aussi différente : elle est définie à partir de l'orientation des segments par rapport au centre de la région test et rejoint en un certain sens les travaux qui étudiaient localement l'orientation dans une mammographie.

Dans le Chapitre 6 nous concluons notre étude théorique du cadre a contrario pour la détection des convergences dans les images en rappelant les résultats principaux et les différentes altérations du cadre a contrario : choix des structures élémentaires, définition de modèles anisotropes sur ces structures, définitions différentes du nombre de fausses alarmes... Enfin nous terminons en évoquant d'autres perspectives de changement du cadre a contrario, comme l'estimation de modèles de mélanges paramétriques à plus de deux termes de convergence, la relaxation de l'hypothèse d'indépendance des structures linéaires, ou encore la question théorique de la loi sur les structures linéaires d'entropie maximale telle qu'aucune observation n'est significative.

Etat de l'art

Sommaire

2.1	Détection de convergences globales	9
2.2	Détections de convergences locales	11
2.2.1	Méthodes de détection des lésions stellaires	11
2.2.2	Détection de motifs de convergence	13
2.2.3	Détection de jonctions	14

Ce chapitre détaille certains travaux concernant la détection des convergences dans les images. Ils se répartissent en deux familles : la détection des convergences globales (essentiellement les points de fuite) et la détection des convergences locales (par exemple les lésions stellaires).

Tous n'utilisent pas le cadre a contrario mais la plupart des travaux cités dans la suite en sont issus.

2.1 Détection de convergences globales

La méthode a contrario a été utilisée dans le but de détecter les points de fuite dans une image [1]. Cet article a inspiré le Chapitre 3 de ce manuscrit. Les auteurs proposent une méthode de détection des points de fuite sans paramètre, et sans hypothèse supplémentaire sur la géométrie de la scène ou sur les paramètres de calibration de la caméra.

Une première partie de la méthode est une étape de détection des segments présents dans l'image, qu'on ne détaillera pas ici puisqu'un exemple de détecteur de segments a été présenté dans le chapitre 1. Le principe de regroupement de ces segments est le fait que leurs droites support possèdent une intersection (même à l'infini). Cependant dans la pratique, les erreurs de mesure lors de la détection des segments rendent impossible le fait que plusieurs droites s'intersectent en exactement un point. Pour y remédier le principe de regroupement est altéré : on considère que des segments doivent être regroupés si leurs droites support rencontrent une même région V . Ces régions sont appelées régions de fuite, elles sont les régions test.

A priori les points de fuite d'une image peuvent se trouver dans tout le plan de l'image. Afin de tester toutes les régions potentielles les auteurs créent une partition du plan en un nombre fini de régions V . En réalité les régions sont de deux sortes. Dans le domaine intérieur de l'image les régions test sont des carrés. On partitionne le domaine extérieur à l'image par des portions de secteurs angulaires,

délimitées par des cercles centrés au centre de l'image. Le choix des rayons des cercles concentriques est conditionné par la propriété d'équiprobabilité des régions V . La probabilité qu'une droite intersecte une région V ne doit pas dépendre de la région. Cette propriété assure que deux régions V et V' nécessitent le même nombre de droites les intersectant pour être détectées. Explicitons l'algorithme itératif de calcul des rayons des cercles partitionnant l'extérieur de l'image. Le domaine de l'image est assimilé au disque circonscrit de l'image, donc de rayon $R = N/\sqrt{2}$ où N est la taille de l'image initiale. Soit $d\theta$ la précision angulaire des régions extérieures. La probabilité $p_e(d, d')$ qu'une droite rencontre une région V entre les cercles de rayon d et d' se calcule par la formule [50] :

$$p_e(d, d') = \frac{L_i - L_e}{|\Omega|}, \quad (2.1)$$

où $|\Omega|$ est le périmètre de l'image et L_i et L_e sont les périmètres intérieur et extérieur de l'enveloppe convexe de Ω et de V . Ce résultat est un théorème de géométrie stochastique qu'on commentera plus en détail dans le Chapitre 3.

Dès lors le côté des régions intérieures est choisi égal au bord intérieur des premières régions extérieures soit $2R \sin(d\theta)$. La probabilité qu'une droite de l'image rencontre une région intérieure est alors

$$p_i = \frac{4 \sin(d\theta)}{R}, \quad (2.2)$$

toujours d'après [50]. On calcule alors itérativement chaque rayon des cercles extérieurs : le premier est fixé égal à R , puis un rayon d_k étant calculé, on cherche d_{k+1} de sorte que $p_e(d_k, d_{k+1}) = p_i$. On s'arrête lorsque on a trouvé $d_k > d_\infty$ où d_∞ est défini par

$$\lim_{d \rightarrow +\infty} p_e(d_\infty, d) = p_i. \quad (2.3)$$

Les régions extérieures dans le dernier anneau sont non bornées, elles représentent les directions des droites parallèles dans l'image, qui s'intersectent à l'infini.

Enfin, la procédure a contrario consiste à compter le nombre k de droites qui intersectent une région V , grâce à l'hypothèse d'indépendance des droites ce nombre suit une loi binomiale de paramètres N et p_i la probabilité qu'une droite de l'image intersecte une région quelconque.

Les auteurs donnent ensuite une méthode pour s'affranchir du paramètre $d\theta$: la procédure est reconduite pour tous les $d\theta = 2^{-s}\pi$, où $s = 4, 5, \dots, 7$ qui sont les valeurs les plus utiles d'après leurs expériences. Le nombre de fausses alarmes d'une région V est $NFA(V_s) = nM_s B(p_s, N_s, k)$ où n est le nombre de valeurs de s testées et N_s est le nombre de segments avec une précision supérieure à $2^{-s}\pi$ et M_s est le nombre de régions dans la partition à l'échelle s . On rappelle également la notation $B(n, k, p) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$.

Quand une région est détectée significative pour une échelle s donnée il est très probable qu'elle le soit pour les échelles voisines, de même qu'il est possible que les régions voisines soient aussi significatives. Pour choisir la meilleure région de fuite,

les auteurs introduisent un concept de maximalité : une région V est maximale si et seulement si, le nombre de fausses alarmes $NFA(V)$ est inférieur à tout $NFA(V')$ où V' est une région voisine de V ou d'intersection non vide avec V .

A l'issue de cette étape il peut subsister des faux positifs : des régions significatives obtenues par la contribution de segments de différentes régions significatives. Cela peut se produire à l'intersection de deux faisceaux de droites parallèles qui eux-mêmes votent pour leur propre région de fuite. Pour remédier à cela on exécute une seconde fois la procédure, en commençant par la région la plus significative, et en éliminant les segments qui votent pour elle des autres régions. Le nombre de fausses alarmes de ces régions est calculé à nouveau, et on recommence avec la nouvelle région la plus significative jusqu'à épuisement des segments votant.

2.2 Détections de convergences locales

Dans la sous-section 2.2.1 nous détaillons les principes généraux utilisés pour la détection des lésions stellaires. Les deux sous-sections suivantes décrivent des méthodes a contrario pour la détection de ces lésions, ou pour la détection des jonctions dans une image, qui présentent des similarités de forme avec les lésions stellaires.

2.2.1 Méthodes de détection des lésions stellaires

Beaucoup de méthodes de détections des lésions stellaires s'articulent en deux étapes. La première est l'extraction de caractéristiques locales de l'image. La deuxième est la classification des observations en assignant par exemple à chaque pixel la probabilité d'appartenance à une lésion.

Plusieurs choix sont possibles pour l'extraction de ces caractéristiques mais tous permettent de distinguer les zones à risque des zones normales dans la mammographie.

Les lésions stellaires sont caractérisées par un centre plus intense [30] dû à l'atténuation plus forte des rayons et délimité par des bords, ainsi qu'une zone périphérique où les spicules convergent vers le centre.

Certaines méthodes utilisent une de ces deux caractérisations mais d'autres auteurs ont choisi de les combiner [52], [3]. Pour la détection des centres plus intenses les auteurs de [52] utilisent des filtres RMF (Recursive Median Filter) pour détecter les changements d'intensité importants. Tandis que [33] extraient deux caractéristiques qui sont l'intensité moyenne dans un voisinage ainsi que l'écart type de l'intensité sur un voisinage de chaque pixel.

Pour détecter les zones où les spicules sont organisées en "étoile" ces mêmes auteurs calculent l'orientation du gradient sur un voisinage. Ils utilisent alors comme caractéristique l'écart type de l'histogramme de l'orientation, traduisant l'idée que sur une lésion stellaire toutes les orientations sont représentées, et que par conséquent l'orientation locale doit avoir un histogramme relativement plat. Cette caractéristique a été introduite par Kegelmeyer dans [29]. Nommée ALOE pour "Analysis of

local oriented edges" elle se calcule en tout point à partir de l'histogramme de l'orientation locale dans un voisinage autour de ce point. La mesure ALOE est simplement l'écart type de la hauteur des boîtes cet histogramme. Les grandes valeurs de ALOE reflètent des histogrammes avec des modes, donc des zones de la mammographie où un petit nombre de directions sont privilégiées. A l'inverse si en un point la valeur de ALOE est faible cela montre qu'autour de ce point l'orientation a un histogramme relativement plat. Elle prend donc toutes les valeurs uniformément, et cela est le signe d'un motif stellaire. ALOE est donc une caractéristique discriminante des lésions stellaires mais son inconvénient est sa sensibilité, entraînant un grand nombre de faux positifs. Les auteurs ont donc ajouté d'autres caractéristiques, réagissant au motif "normal" du tissu glandulaire. Pour les calculer la mammographie est convoluée avec quatre noyaux de convolution séparément. On calcule ensuite la somme des valeurs sur une fenêtre de taille 15 par 15. Les noyaux et la taille de la fenêtre ont été choisis expérimentalement. Ces cinq caractéristiques locales (ALOE et les 4 mesures de l'énergie) sont intégrées à un arbre de décision binaire afin de classer chaque pixel d'une mammographie et de lui attribuer une mesure de suspicion.

Dans [28] l'orientation en chaque pixel est calculée à l'aide de dérivées secondes de filtres gaussiens, en utilisant le fait que trois directions de filtrages seulement sont nécessaires. Les convolutions avec ces filtres sont faites sur plusieurs échelles qui couvrent toutes les largeurs de segments potentielles et la réponse maximale en chaque pixel est sauvegardée. Cela résulte en un ensemble \mathcal{S} de pixels qui appartiennent potentiellement à des structures linéaires. Deux caractéristiques sont calculées en chaque point i , basées sur la carte des orientations des pixels dans un voisinage \mathcal{N}_i formé des pixels j à distance r_{ij} , $r_{\min} \leq r_{ij} \leq r_{\max}$ de i . La première est le nombre total n_i de pixels j orientés vers le centre i . En réalité il est normalisé et la première caractéristique est

$$f_{1,i} = \frac{n_i - pN_i}{\sqrt{N_i p(1-p)}}, \quad (2.4)$$

où N_i est le nombre de pixels dans le voisinage \mathcal{N}_i , et où p est la probabilité moyenne qu'un de ces pixels soit orienté vers i si son orientation est uniforme. La deuxième caractéristique exploite le fait que les spicules autour d'une lésion sont disposées tout autour du centre de la lésion, et sont donc dans plusieurs directions. Le voisinage autour de i est divisé en K "bins" dans lequel on a compté $n_{i,k}$ pixels bien orientés parmi les $N_{i,k}$ pixels présents. On compte alors le nombre de bins n_+ parmi les K où $n_{i,k}$ est supérieur à la valeur moyenne attendue (dans le cas où la carte des orientations suit un bruit uniforme). La deuxième caractéristique est le nombre n_+ normalisé :

$$f_{2,i} = \frac{n_+ - K/2}{\sqrt{K/4}}. \quad (2.5)$$

Ces deux caractéristiques, sensibles aux motifs à symétrie radiale sont agrégés en un classifieur Bayésien afin de détecter les lésions stellaires.

Dans [40] les spicules sont détectées, puis les auteurs utilisent la transformée de Hough pour détecter les lésions stellaires potentielles. Pour la détection des spicules,

les auteurs de [25] les modélisent comme des structures linéaires qu'ils extraient à l'aide de la courbure moyenne. Dans [49] les auteurs utilisent la transformée de Radon pour détecter les segments dans l'image susceptibles d'être des spicules. En effet la transformée de Radon associe à une image une fonction dans le domaine de Radon et les droites de l'image de départ sont envoyées sur des points dans le domaine de Radon. Ces points sont détectables facilement par un filtrage suivi d'un seuillage de la réponse. Il suffit alors de prendre la transformée de Radon inverse pour détecter les droites dans l'image de départ. Les convergences locales des spicules sont ensuite détectées en utilisant des filtres à symétrie radiale.

2.2.2 Détection de motifs de convergence

Les méthodes a contrario ont déjà été appliquées à la détection des lésions stellaires ou des distorsions architecturales, dans le cadre de la tomosynthèse par Palma lors de sa thèse [41]. Ces deux types de lésions se caractérisent par une organisation en étoile des spicules, autour d'un centre dense et défini pour les premières, sans centre bien défini pour les secondes, c'est pourquoi l'utilisation de la caractérisation des motifs stellaires est importante si on ne veut pas manquer de lésions.

Palma modélise les zones de convergence par des anneaux formés de deux cercles concentriques de rayon r et αr , $\alpha \in [0, 1]$ dans lesquels un certain nombre de points sont orientés vers le disque intérieur. En chaque point de l'image l'orientation est calculée comme étant la direction orthogonale au gradient. Celui-ci est calculé à l'aide de blocs 2×2 pixels qui ne se recouvrent pas afin de garantir l'indépendance entre les gradients des différents pixels. Il en résulte une carte des orientations sur une image sous-échantillonnée, dont chaque valeur est indépendante des autres.

Le modèle a contrario utilisé est celui de l'indépendance entre les pixels et de l'uniformité de l'orientation. Afin de caractériser les zones de convergences, Palma compte le nombre de pixels q dont l'orientation θ vérifie la condition $\tan(\theta)\|\vec{c}\vec{q}\| \leq \alpha r$ et dont la position vérifie $\alpha r \leq \|\vec{c}\vec{q}\| \leq r$, où c est le centre de la couronne et q un point de la couronne. Sous le modèle a contrario la probabilité qu'un pixel q situé dans la couronne soit orienté vers le centre c s'écrit

$$\mathbb{P}(\tan(\theta)\|\vec{c}\vec{q}\| \leq \alpha r \text{ et } \alpha r \leq \|\vec{c}\vec{q}\| \leq r) = \frac{2}{\pi} \tan^{-1} \left(\frac{\alpha r}{\|\vec{c}\vec{q}\|} \right). \quad (2.6)$$

Cette probabilité dépend de la position du point q , plus exactement de sa distance au centre c . La variable représentant le nombre de pixels de la couronne qui sont orientés vers c est notée $Z_{c,r}$. C'est la somme sur tous les pixels q de l'image des indicatrices $\mathbb{1}_{\{\alpha r \leq \|\vec{c}\vec{q}\| \leq r \text{ et } \tan(\theta)\|\vec{c}\vec{q}\| \leq \alpha r\}}$. La loi de $Z_{c,r}$ est déterminée par sa fonction génératrice $G_{Z_{c,r}}$. Celle-ci est calculée comme le produit des fonctions génératrices des indicatrices déjà mentionnées, qui sont des variables indépendantes, sur l'ensemble des pixels q situés dans la couronne, *ie* vérifiant $\alpha r \leq \|\vec{c}\vec{q}\| \leq r$.

Il reste alors à déterminer à partir de quelle valeur λ_r de $Z_{c,r}$ on peut considérer l'événement $Z_{c,r} \geq \lambda_r$ suffisamment peu probable sous le modèle de bruit pour

suspecter une lésion en c . Ce seuil est donné par la méthodologie a contrario, développée dans [16]. En effet en définissant les événements ε -significatifs comme les événements dont le nombre d'occurrences sous le modèle de bruit est inférieur à ε , il suffit de définir λ_r par

$$\lambda_r = \min\{\lambda \in \mathbb{N} \mid \mathbb{P}(Z_{c,r} \geq \lambda) \leq \frac{\varepsilon}{M}\}, \quad (2.7)$$

où M est le nombre de tests (ici le nombre de couples (c, r) testés).

Quand cette étape a été exécutée, l'ensemble des événements ε -significatifs est agrégé afin de réduire ensuite le nombre de faux positifs. Il résulte de cette étape un certain nombre de composantes connexes de points suspects. Pour éliminer les faux positifs dus à la superposition des fibres dans le tissu du sein, Palma étudie la distribution empirique des orientations au sein d'une composante connexe. Si celle-ci présente des modes, alors il est peu probable qu'il s'agisse d'une lésion, un croisement de fibres est plus plausible. Dans le cas où l'orientation dans une composante connexe est relativement uniforme alors il peut s'agir d'une lésion, puisque dans celles-ci les spicules viennent de toutes les directions. Pour mesurer le caractère uniforme de l'orientation dans une composante connexe Palma calcule l'entropie de l'orientation (calculée ici par dérivées secondes de filtres gaussiens).

Cette détection est couplée à celle des centres denses [42] afin de détecter les lésions stellaires.

2.2.3 Détection de jonctions

Dans l'article [51], Xia, Delon et Gousseau exposent une méthode robuste et sans paramètre pour détecter les jonctions dans une image. Jusqu'à présent les méthodes existantes pouvaient détecter les bords, les coins dans une image mais leurs résultats étaient souvent imprécis dans le voisinage des jonctions. Le procédé utilisé ici aboutit à une description géométrique des jonctions (distinction entre les jonctions L, Y, X et T), accompagnée de la donnée de leur position et de leur échelle.

Ce travail se situe dans le cadre des méthodes a contrario, les jonctions détectées sont celles dont la probabilité d'apparaître dans une image de bruit est trop petite. L'hypothèse de bruit faite par les auteurs porte sur la norme et la phase du gradient normalisé de l'image. En effet pour que la méthode soit robuste aux petits changements de contraste on procède à une normalisation locale du gradient : si $I : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ est une image, son gradient est le couple d'images $\nabla(I) = (I_x, I_y)$. Si on désigne par \mathcal{N}_q un voisinage autour du pixel q , le gradient normalisé localement est $\widehat{\nabla(I)} = (\widehat{I}_x, \widehat{I}_y)$ où on calcule par exemple :

$$\widehat{I}_x(q) = \frac{I_x(q)}{\langle \sqrt{I_x^2 + I_y^2} \rangle_{\mathcal{N}_q}}, \quad (2.8)$$

où $\langle . \rangle_{\mathcal{N}_q}$ désigne la moyenne sur \mathcal{N}_q . Cette normalisation ne change pas la phase, calculée comme la direction orthogonale au gradient $\nabla(I)$ de l'image. L'hypothèse

de bruit porte en fait sur un deuxième gradient, calculé à partir du premier en le normalisant par sa moyenne et sa variance empirique globales :

$$\tilde{I}_x = \frac{\hat{I}_x - \mu_x}{\sigma_x}. \quad (2.9)$$

On suppose alors que l'image I est une image aléatoire générique *ie* qu'elle respecte les trois conditions :

1. $\forall q \in I$ la variable aléatoire $\|\tilde{\nabla} I(q)\|$ suit une loi de Rayleigh de paramètre 1,
2. $\forall q \in I$, la phase $\phi_I(q)$ du gradient est uniformément distribuée sur $[0, 2\pi]$,
3. les couples de variables aléatoires $(\|\tilde{\nabla} I(q)\|, \phi_I(q))$ sont indépendants.

Ces hypothèses sont justifiées par l'article de Ruderman et al [46]. Les auteurs modélisent ensuite les jonctions j en donnant leur position p , leur échelle r et la liste des directions de leurs branches $\{\theta_m\}_{m=1}^M$. Les directions sont quantifiées, elles sont au nombre de $K(r) = \lfloor 2\pi r \rfloor$. Les branches des jonctions sont en réalité des secteurs angulaires de largeur $2\Delta(r)$, ce qui fait que le nombre de branches d'une jonction est inférieur à $\frac{\pi}{\Delta(r)}$ étant donné que deux branches ne peuvent s'intersecter. Un secteur angulaire correspond d'autant plus à la branche d'une jonction qu'il a de pixels orientés vers le centre de la jonction. Les auteurs ont donc introduit le concept de "force d'une branche" qui tient compte de l'orientation et du gradient des pixels de la branche. La force de la branche $S_p(r, \theta)$ est définie par $\omega_p(r, \theta) = \sum_{q \in S_p(r, \theta)} \gamma_p(q)$ où

$$\gamma_p(q) = \|\tilde{\nabla} I(q)\| \max(|\cos(\Phi(q) - \alpha(\vec{p}\vec{q}))| - |\sin(\Phi(q) - \alpha(\vec{p}\vec{q}))|, 0) \quad (2.10)$$

où $\alpha(\vec{p}\vec{q})$ est l'angle du vecteur $\vec{p}\vec{q}$ et où $\Phi(q)$ l'orientation du pixel q .

Un pixel q contribue d'autant plus à la force de la branche que $\|\tilde{\nabla} I(q)\|$ est grand et que l'angle $\Phi(q) - \alpha(\vec{p}\vec{q})$ a un cosinus grand (en valeur absolue) et un sinus petit (en valeur absolue), ce qui se produit quand cet angle est proche de 0, c'est-à-dire quand le pixel est orienté vers l'origine de la branche p . Plus la force de la branche est grande, plus il est probable que la branche appartienne à une jonction.

La force d'une jonction $j = \{p, r, \{\theta_m\}_{m=1}^M\}$ est définie comme le minimum des forces des branches $t(j) = \min_{m=1 \dots M} \omega_p(r, \theta_m)$. Elle caractérise convenablement les jonctions. Elle présente de plus l'avantage de donner des probabilités sous le modèle de bruit faciles à calculer. En effet, puisque les branches d'une jonction ne peuvent pas s'intersecter, les variables $\omega_p(r, \theta_m)$ pour des m différents sont indépendantes et la probabilité $\mathbb{P}_{\mathcal{H}_0}(t(j) \geq t)$ s'exprime comme le produit des probabilités $\mathbb{P}_{\mathcal{H}_0}(\omega_p(r, \theta_m) \geq t), \forall m = 1, \dots, M$.

Sous le modèle de bruit \mathcal{H}_0 la loi de $\gamma_p(q)$ est donnée par sa densité :

$$\mu(z) = \frac{1}{2} \delta_0(z) + H(z) \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{z^2}{4}} \operatorname{erfc}\left(\frac{z}{2}\right) dz,$$

où δ_0 est la masse de Dirac en 0, H la fonction de Heaviside et $\operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^\infty e^{-s^2} ds$.

On définit alors le nombre de fausses alarmes de la jonction j par $\text{NFA}(j) = \mathcal{J}(M) \mathbb{P}_{\mathcal{H}_0}(t(j) \geq t)$ où $\mathcal{J}(M)$ est le nombre maximal de jonctions d'ordre M que l'on peut majorer en fonction de r_{\min} et r_{\max} et du nombre $K(r)$ de directions possibles des branches d'une jonction d'ordre M .

Les jonctions dont le nombre de fausses alarmes est inférieur à ϵ sont dites ϵ -significatives.

Les jonctions significatives maximales sont ensuite obtenues à l'aide de deux principes d'exclusion, le premier, local, concerne des jonctions de même ordre et il exprime qu'une jonction significative va entraîner un certain nombre d'autres jonctions significatives, centrées en des points voisins, et qu'on prendra donc la jonction la plus significative sur un voisinage de taille fixe. Le deuxième principe d'exclusion est issu du phénomène de masquage : à deux positions p et p' voisines il peut y avoir deux jonctions significatives d'ordres distincts, on sélectionnera alors celle d'ordre maximal. Cela revient par exemple à garder chaque fois que c'est possible les jonctions-Y au lieu des jonctions-L.

Détection de convergences globales

Sommaire

3.1	Modélisation de répartitions aléatoires des droites d'une image	18
3.1.1	Paramétrisation des droites	18
3.1.2	Modèle invariant par translation et rotation : Mesure de Poincaré	19
3.1.3	Modèle anisotrope : modélisation de convergences	19
3.2	Géométrie stochastique	22
3.2.1	Résultats sous la mesure de Poincaré	22
3.2.2	Pavage en régions équiprobables sous le modèle uniforme	23
3.2.3	Extension au cas d'un modèle gaussien	26
3.2.4	Etude asymptotique du modèle gaussien	32
3.3	Détection a contrario de convergences de droites dans le plan d'une image	43
3.3.1	Evénements d'étude	43
3.3.2	Nombre de fausses alarmes, événements significatifs	43
3.4	Estimation de modèles anisotropes	44
3.4.1	Type de modèle cherché	44
3.4.2	Estimation du point de convergence globale	45
3.4.2.1	Point minimisant un critère L^2	45
3.4.2.2	Point le plus significatif	46
3.4.3	Estimation du poids et de la variance	47
3.4.3.1	Par l'algorithme EM	47
3.4.3.2	Par maximum de vraisemblance	48
3.5	Exemples	49
3.5.1	Exemples synthétiques	50
3.5.2	Expériences sur des mammographies	50
3.5.3	Expériences sur des images naturelles	53

Ce chapitre traite de modèles aléatoires sur les droites dans une image. Elles sont par exemple les droites support des segments issus du Line Segment Detector [21] (accessible aussi en ligne sur IPOL : <http://www.ipol.im/pub/art/2012/gjmr-lsd/>). Nous rappelons des résultats de géométrie stochastique sous le modèle uniforme puis nous présentons leur généralisation sous un modèle anisotrope.

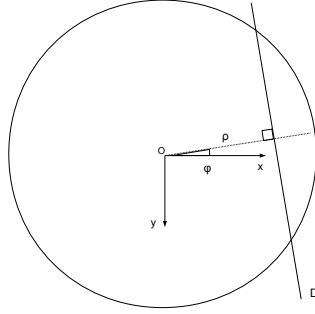


FIGURE 3.1 – Paramétrisation des droites dans le plan de l'image. Le domaine de l'image est un disque de rayon R_I . L'origine du repère est choisie au centre de l'image et les axes sont orientés selon la convention image. La première coordonnée d'une droite D est sa distance (signée) à l'origine et $D \cap \Omega \neq \emptyset \Leftrightarrow \rho \in [-R_I, R_I]$. La seconde est l'angle $\varphi \in [0, \pi]$ entre l'axe horizontal et la perpendiculaire à D passant par le centre O .

Ces résultats sont utiles pour la détection de convergences globales dans le cadre a contrario contre différents modèles de bruit. Enfin nous présentons différentes méthodes d'estimation de modèles anisotropes sur les droites d'une image.

3.1 Modélisation de répartitions aléatoires des droites d'une image

3.1.1 Paramétrisation des droites

On considère une image et son domaine Ω , supposé circulaire. On adopte la convention image pour définir un repère cartésien du plan de l'image : l'axe des abscisses est horizontal orienté positivement vers la droite et l'axe des ordonnées est vertical orienté positivement vers le bas. L'origine est le centre O de l'image. Les droites de l'image sont représentées par leurs coordonnées polaires $(\rho, \varphi) \in \mathbb{R} \times [0, \pi[$. Normalement le paramétrage polaire d'une droite D est donné par les coordonnées polaires $(\rho, \varphi) \in \mathbb{R}^+ \times [0, 2\pi[$ du projeté orthogonal de l'origine O sur D mais ici on ramène le couple (ρ, φ) dans $\mathbb{R} \times [0, \pi[$ par l'application :

$$(\rho, \varphi) \mapsto \begin{cases} (\rho, \varphi) & \forall \varphi \in [0, \pi[\\ (-\rho, \varphi - \pi) & \forall \varphi \in [\pi, 2\pi[. \end{cases}$$

La première coordonnée ρ est alors la distance signée de la droite à l'origine tandis que la deuxième φ est l'angle entre l'axe horizontal et la perpendiculaire à la droite D passant par l'origine (Figure 3.1). De cette façon des droites $D_{(\rho, \varphi)}$ et $D'_{(\rho', \varphi')}$ sont parallèles si et seulement si $\varphi = \varphi'$.

Notons que l'équation de D s'écrit alors

$$\rho - x \cos \varphi + y \sin \varphi = 0. \quad (3.1)$$

3.1.2 Modèle invariant par translation et rotation : Mesure de Poincaré

On se donne une mesure sur le couple de variables (ρ, φ) sous la forme $d\mu_f = f(\rho, \varphi)d\rho d\varphi$ où f est une fonction continue positive. Alors la seule mesure (à constante multiplicative près) invariante par translation et rotation sur (ρ, φ) est obtenue en prenant pour f la fonction constante égale à 1 [50]. Nous noterons cette mesure μ_1 , et on a

$$d\mu_1 = d\rho d\varphi.$$

En restreignant la fonction f à l'ensemble des droites $D_{(\rho, \varphi)}$ qui intersectent le domaine de l'image Ω et en la renormalisant on définit une densité sur l'ensemble des droites de l'image. Le modèle ainsi défini sur les droites de l'image est en particulier isotrope : aucune orientation n'est privilégiée.

3.1.3 Modèle anisotrope : modélisation de convergences

Il sera utile dans la suite de disposer de modèles sur les droites de l'image qui tiennent compte d'une orientation privilégiée, par exemple pour décrire l'orientation normale des spicules vers le tétou dans une mammographie. Nous allons construire de tels modèles, en définissant d'abord une mesure sur les droites du plan de l'image que nous conditionnerons ensuite à l'ensemble des droites rencontrant l'image (ce qui impliquera une renormalisation de la densité).

Nous considérons donc une image dans laquelle il existe un "point de convergence globale" noté M et une mesure μ_g sur les couples (ρ, φ) définie à partir d'une fonction continue positive g .

Nous choisissons pour g la fonction définie sur $\mathbb{R} \times [0, \pi[$ par :

$$g(\rho, \varphi) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(\rho - x_M \cos \varphi + y_M \sin \varphi)^2 / 2\sigma^2}, \quad (3.2)$$

où (x_M, y_M) désigne les coordonnées du point de convergence globale M et σ est un paramètre lié à la précision avec laquelle les droites convergent vers le point M .

Une propriété importante d'un tel modèle est son invariance par changement de l'origine : si on change l'origine du paramétrage des droites, la densité sur le couple (ρ', φ') des nouvelles coordonnées est de la même forme que (3.2), où x_M et y_M sont remplacés par les coordonnées (x'_M, y'_M) de M dans le nouveau repère.

La densité g peut se réécrire aussi

$$g(\rho, \varphi) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(\rho - r_M \cos(\varphi - \theta_M))^2 / 2\sigma^2}, \quad (3.3)$$

où $(r_M, \theta_M) \in \mathbb{R} \times [0, \pi[$ sont les coordonnées polaires du point M vérifiant les relations $x_M = r_M \cos \theta_M$ et $y_M = -r_M \sin \theta_M$ dans le repère image.

Dans ce cas la mesure μ_g est

$$d\mu_g = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(\rho - x_M \cos \varphi + y_M \sin \varphi)^2 / 2\sigma^2} d\rho d\varphi, \quad (3.4)$$

et la constante $\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}}$ assure que $\int_{\mathbb{R} \times [0, \pi[} d\mu_g = 1$ et fait de μ_g une mesure de probabilité sur l'ensemble des droites du plan de l'image.

La Figure 3.2 montre deux échantillons de droites, simulés selon la loi uniforme ou selon une mesure gaussienne restreintes à l'ensemble des droites qui rencontrent le domaine de l'image. Les paramètres de la loi gaussienne utilisée sont $(x_M, y_M) = (30, 50)$ et $\sigma = 20$. On a représenté pour chaque échantillon l'image de rayon $R_I = 256$ et les droites simulées. Chaque droite peut aussi être représentée par ses coordonnées polaires (ρ, φ) et donc être visualisée comme un point dans le domaine $\mathbb{R} \times [0, \pi[$. Ici les droites intersectent le domaine de l'image, donc on a représenté les échantillons par deux nuages de points dans le pavé $[-R_I, R_I] \times [0, \pi[$. Pour l'échantillon uniforme les points sont uniformément répartis. Pour l'échantillon gaussien, on observe une corrélation entre les variables ρ et φ puisque les points sont répartis autour de la courbe $\varphi \mapsto (r_M \cos(\theta_M - \varphi), \varphi)$.

Proposition 3.1.1. *La variable $\rho - r_M \cos(\varphi - \theta_M)$ est la distance signée de la droite $D_{(\rho, \varphi)}$ au point M . Sous la loi μ_g elle suit la loi normale de variance σ^2 et de moyenne 0 et la variable φ suit la loi uniforme sur l'intervalle $[0, \pi[$.*

Démonstration. Par changement d'origine du repère cartésien, les coordonnées de la droite D sont (ρ', φ') où $\varphi' = \varphi$, donc si on translate l'origine en $M(x_M, y_M)$ l'équation de D devient

$$\rho' - (x - x_M) \cos \varphi + (y - y_M) \sin \varphi = 0 \quad (3.5)$$

$$\rho' + x_M \cos \varphi - y_M \sin \varphi - x \cos \varphi + y \sin \varphi = 0. \quad (3.6)$$

Ce qui permet d'identifier la première coordonnée polaire de D dans le repère centré en M :

$$\rho' = \rho - x_M \cos \varphi + y_M \sin \varphi. \quad (3.7)$$

Donc si on translate l'origine en M , les coordonnées de la droite $D_{(\rho, \varphi)}$ dans le nouveau repère deviennent $(\rho - r_M \cos(\varphi - \theta_M), \varphi)$. Donc $\rho - r_M \cos(\varphi - \theta_M)$ est bien la distance (signée) de D au point M . En faisant le changement de variables $\tilde{\rho} = \rho - r_M \cos(\varphi - \theta_M)$ la densité de probabilité \tilde{g} sur $(\tilde{\rho}, \varphi)$ est la fonction (puisque le jacobien du changement de variable $(\rho, \varphi) \mapsto (\rho - r_M \cos(\varphi - \theta_M), \varphi)$ est égal à 1) :

$$\tilde{g}(\tilde{\rho}, \varphi) = g(\tilde{\rho} + r_M \cos(\varphi - \theta_M), \varphi) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\tilde{\rho}^2/2\sigma^2}.$$

En intégrant selon φ on obtient la densité marginale de $\tilde{\rho}$:

$$\tilde{\rho} \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{-\tilde{\rho}^2/2\sigma^2}.$$

On reconnaît la loi normale de moyenne 0 et de variance σ^2 .

Montrons que φ est une variable uniforme en calculant sa densité h (à support dans $[0, \pi[$). Pour tout $\varphi \in [0, \pi[$ on a

$$h(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} g(\rho, \varphi) d\rho,$$

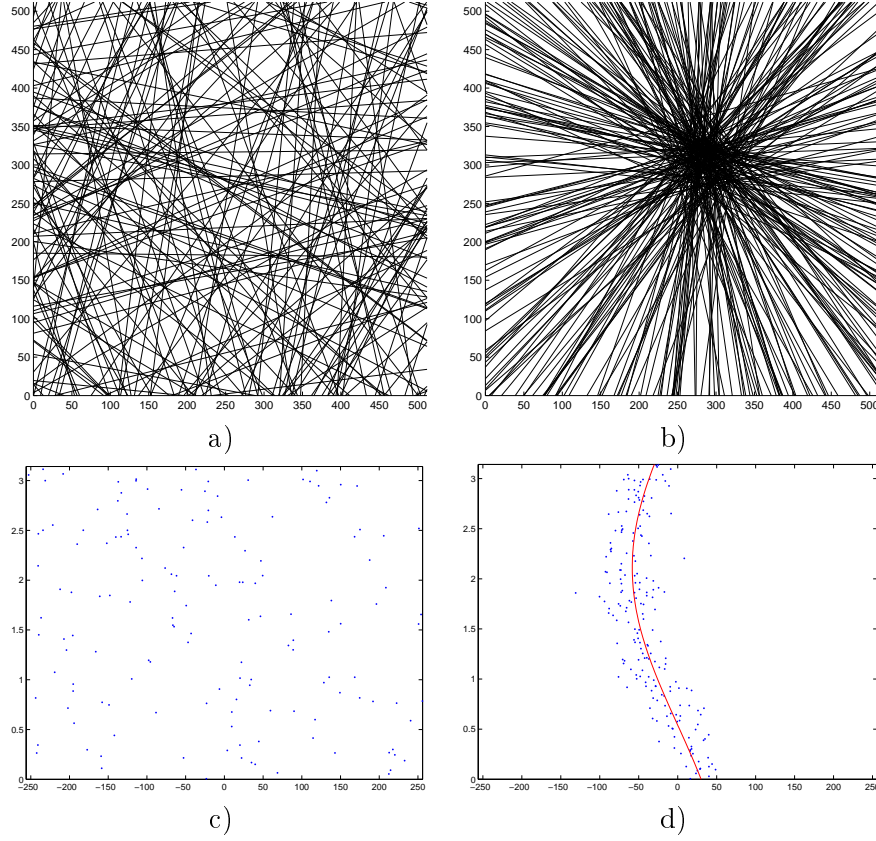


FIGURE 3.2 – Une image synthétique de rayon $R_I = 256$. a) Echantillon de 200 droites sous la mesure uniforme dans l'image Ω , b) échantillon de 200 droites de mesure gaussienne sur l'image Ω avec $\sigma = 20$ et $(x_M, y_M) = (30, 50)$ dans le repère centré sur l'image, c) et d) les mêmes échantillons représentés dans le domaine $[-R_I, R_I] \times [0, \pi]$. A gauche les points sont uniformément répartis dans le pavé. A droite ils sont concentrés autour de la courbe $(r_M \cos(\theta_M - \varphi), \varphi)$ représentée en rouge. La largeur du nuage de points est proportionnelle à l'écart type σ .

d'où

$$h(\varphi) = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(\rho - r_M \cos(\varphi - \theta_M))^2 / 2\sigma^2} d\rho = \int_{\mathbb{R}} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\tilde{\rho}^2 / 2\sigma^2} d\tilde{\rho} = \frac{1}{\pi}.$$

Ainsi h est la densité uniforme sur $[0, \pi[$. \square

3.2 Géométrie stochastique

Nous présentons des résultats de géométrie stochastique pour les deux modèles précédemment définis. Il s'agit du calcul de la mesure des droites (sous la mesure de Poincaré ou sous la mesure gaussienne (3.3)) qui intersectent un convexe ou deux convexes donnés dans le plan de l'image. Ces résultats vont être utilisés lors de la mise en oeuvre de la méthode de détection des convergences dans l'image. En effet le plan de l'image va être partitionné en une famille de régions test qui seront des convexes de deux types : à l'intérieur de l'image ces régions seront des disques de différents rayons. A l'extérieur du domaine de l'image les régions tests seront des portions de secteurs angulaires délimités par des cercles concentriques tel que le proposent Almansa et al. [1].

3.2.1 Résultats sous la mesure de Poincaré

Les résultats suivants sont classiques en géométrie stochastique, nous les rappelons donc avant d'en donner une généralisation.

Théorème 3.2.1 ([50] p.33). *Soit K un convexe borné du plan. La mesure de l'ensemble des droites sous le modèle uniforme qui intersectent K est donnée par*

$$\mu_1(D \cap K \neq \emptyset) = \text{Per}(K) \quad (3.8)$$

où $\text{Per}(K)$ est le périmètre de K .

Ainsi la mesure des droites qui intersectent l'image est $\mu_1(D \cap \Omega \neq \emptyset) = 2\pi R_I$.

Soient K_1 et K_2 deux convexes bornés du plan. La figure 3.3 illustre les périmètres extérieur et intérieur de K_1 et K_2 .

Théorème 3.2.2 ([50] p.33). *La mesure de l'ensemble des droites rencontrant les deux convexes K_1 and K_2 est :*

$$\begin{aligned} \mu_1(D \cap K_1 \cap K_2 \neq \emptyset) &= L_i - L_e && \text{si } K_1 \cap K_2 = \emptyset \\ &= \text{Per } K_2 && \text{si } K_2 \subset K_1 \\ &= \text{Per } K_1 + \text{Per } K_2 - L_e && \text{sinon,} \end{aligned} \quad (3.9)$$

où L_i et L_e désignent les périmètres intérieur et extérieur de K_1 et K_2 .

A partir des théorèmes 3.2.1 et 3.2.2 on déduit une expression pour la probabilité sous la mesure μ_1 qu'une droite intersectant un convexe K_1 intersecte aussi un convexe K_2 .

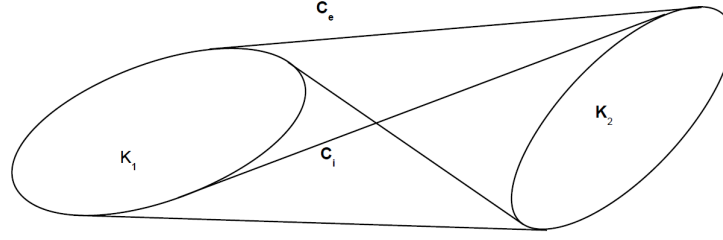


FIGURE 3.3 – Périmètre intérieur et extérieur de l’enveloppe convexe de K_1 et K_2 si $K_1 \cap K_2 = \emptyset$. L’enveloppe convexe de K_1 et K_2 est notée C_e et le périmètre extérieur est $L_e = \text{Per } C_e$. L’enveloppe intérieure de K_1 et K_2 est notée C_i et le périmètre intérieur est $L_i = \text{Per } C_i$

Théorème 3.2.3 ([50]).

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}_1(D \cap K_2 \neq \emptyset | D \cap K_1 \neq \emptyset) &= \frac{L_i - L_e}{\text{Per } K_1} && \text{si } K_1 \cap K_2 \neq \emptyset \\
 &= \frac{\text{Per } K_2}{\text{Per } K_1} && \text{si } K_2 \subset K_1 \quad (3.10) \\
 &= \frac{\text{Per } K_1 + \text{Per } K_2 - L_e}{\text{Per } K_1} && \text{sinon.}
 \end{aligned}$$

3.2.2 Pavage en régions équiprobables sous le modèle uniforme

Afin de tester toutes les convergences potentielles on effectue un pavage du plan de l’image en régions équiprobables sous le modèle uniforme. Cette idée a été introduite pour la première fois par Almansa et al. dans [1]. Les calculs qui suivent s’appuient sur le théorème 3.2.3. Le domaine de l’image est supposé circulaire (on considère le cercle inscrit dans l’image originale). A l’intérieur de l’image, les régions test sont les disques de rayon r , où l’échelle r est variable. A l’extérieur de l’image les régions tests seront des portions de secteurs angulaires délimitées par des cercles concentriques de centre le centre de l’image (Figure 3.4).

Les auteurs de [1] donnent un algorithme itératif pour le calcul de la suite $(d_n^r)_n$ des rayons successifs des cercles délimitant les régions afin de garantir leur équiprobabilité. L’existence de cette suite donne une condition nécessaire sur la précision angulaire des régions. En procédant ainsi on est assuré que les régions tests pour l’échelle r donnée sont équiprobables sous le modèle uniforme. Cette procédure est reconduite pour chaque rayon test r , afin de garantir une détection des zones de convergences multi-échelles.

Le rayon de l’image est $R_I = \frac{1}{2} \min(n_x, n_y)$ où (n_x, n_y) est la taille de l’image. D’après le théorème 3.2.3 la probabilité qu’une droite de l’image intersecte une région intérieure à l’échelle r est $p_i = \frac{r}{R_I}$.

Calculons, en fonction de θ, d, d', R_I la probabilité qu’une droite de l’image intersecte la région V délimitée par les arcs de cercles de rayons d et d' et d’écart

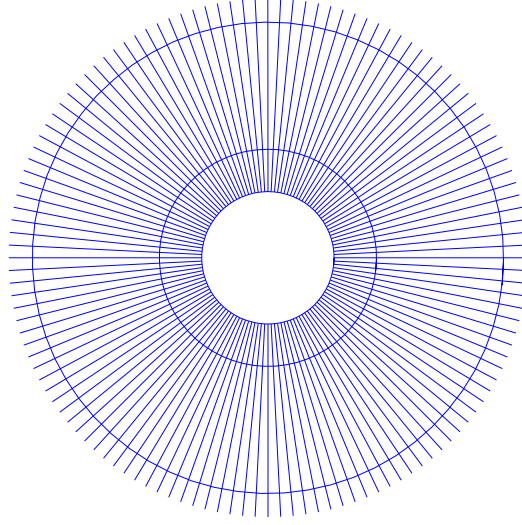


FIGURE 3.4 – Pavage de l’extérieur de l’image en régions équiprobables. Les régions extérieures sont délimitées par des cercles concentriques, de rayons strictement croissants (d_n) uniquement déterminés. La précision angulaire θ des régions est choisie la plus petite possible, de sorte que les régions soient les plus petites possibles. Toutes les régions sont équiprobables sous le modèle uniforme ce qui explique que les régions éloignées soient plus grandes.

angulaire 2θ , sous le modèle uniforme. Notons que l’invariance par rotation du modèle uniforme entraîne que cette probabilité ne dépend pas de l’angle entre la région V et l’axe horizontal : toutes les régions extérieures délimitées par les rayons d et d' sont équiprobables. On peut donc supposer pour faciliter les calculs que la région V est centrée sur l’axe horizontal. Nous noterons cette probabilité $p_e(d, d')$.

D’après le théorème 3.2.3 la probabilité qu’une droite qui rencontre l’image, intersecte la région V s’écrit

$$p_e(d, d') = \frac{L_i - L_e}{\text{Per}(\Omega)}, \quad (3.11)$$

où L_i et L_e sont respectivement les périmètres intérieur et extérieur de l’image et de la région V (Figure 3.5). Calculons le périmètre extérieur de l’enveloppe de V et Ω . Il est composé de deux segments de longueur $\sqrt{d'^2 - R_I^2}$, de l’arc de cercle $2\theta d'$, et de l’arc de cercle \widehat{GH} (Figure 3.5).

$$L_e = 2\sqrt{d'^2 - R_I^2} + 2\theta d' + R_I(2\pi - 2\theta - \widehat{GOD}). \quad (3.12)$$

De même, le périmètre intérieur est composé de deux segments de longueur $\sqrt{d^2 - R_I^2}$, de l’arc de cercle $2\theta d$, de deux segments de longueur $d' - d$, et de l’arc

de cercle \widehat{EF} (Figure 3.5).

$$L_i = 2\sqrt{d^2 - R_I^2} + 2\theta d' + 2(d' - d) + R_I(2\pi - 2\theta - 2\widehat{FOD}). \quad (3.13)$$

D'où

$$L_i - L_e = 2\sqrt{d^2 - R_I^2} + 2(d' - d) - 2R_I\widehat{FOD} - 2\sqrt{d'^2 - R_I^2} + 2R_I\widehat{GOD}. \quad (3.14)$$

Or d'après les formules de trigonométrie, on a :

$$\widehat{GOD} = \arccos \frac{R_I}{d'} \quad (3.15)$$

$$\begin{aligned} \widehat{FOD} &= \widehat{FOC} - \widehat{DOC} \\ &= \arccos \frac{R_I}{d} - 2\theta. \end{aligned} \quad (3.16)$$

La probabilité qu'une droite intersecte une région V sachant qu'elle intersecte l'image est donc égale à

$$p_e(d, d') = \frac{1}{\pi} \left[2\theta + \left[q - \sqrt{q^2 - 1} + \arccos \frac{1}{q} \right] \frac{\frac{d'}{R_I}}{\frac{d}{R_I}} \right], \quad (3.17)$$

où le crochet intérieur signifie qu'on prend la différence des valeurs aux bornes.

Notons $\gamma(q) = q - \sqrt{q^2 - 1} + \arccos \frac{1}{q}$. La probabilité calculée se réécrit :

$$p_e(d, d') = \frac{1}{\pi} \left[2\theta + \gamma\left(\frac{d'}{R_I}\right) - \gamma\left(\frac{d}{R_I}\right) \right]. \quad (3.18)$$

L'équiprobabilité des régions intérieures et extérieures détermine de manière unique la suite finie $(d_n)_n$ des rayons du pavage. Le premier rayon est fixé $d_1 = R_I$ de sorte que les premières régions extérieures soient tangentes à l'image. Alors le rayon d_2 doit vérifier $p_e(d_1, d_2) = \frac{r}{R_I} = p_i$. De même si d est fixé, le rayon suivant d' est déterminé et se calcule en inversant l'expression (3.18). La suite des rayons est donc déterminée de proche en proche, jusqu'à obtenir $d' > d_\infty$ où d_∞ est défini par

$$\lim_{d' \rightarrow \infty} p_e(d_\infty, d') = p_i.$$

La fonction $\gamma(q) = q - \sqrt{q^2 - 1} + \arccos \frac{1}{q}$ tend vers $\frac{\pi}{2}$ en $+\infty$, donc finalement

$$\lim_{d' \rightarrow \infty} p_e(d_\infty, d') = \frac{1}{\pi} \left[2\theta + \frac{\pi}{2} - \gamma\left(\frac{d_\infty}{R_I}\right) \right]. \quad (3.19)$$

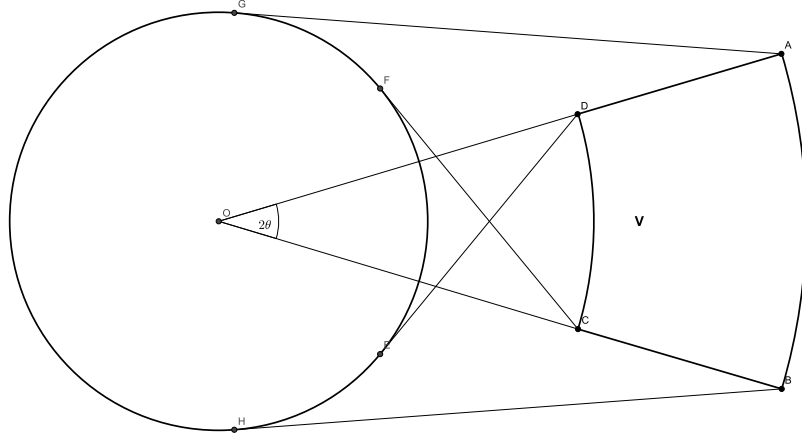


FIGURE 3.5 – Illustration des périmètres extérieur et intérieur de l'image (disque de centre O passant par F) et d'une région extérieure (le quadrilatère $ABCD$).

Donc, en remarquant que la fonction γ est bijective strictement croissante (γ est dérivable de dérivée strictement positive sur $[1, +\infty[$), et notant γ^{-1} sa fonction réciproque, on peut calculer d_∞ selon la formule

$$d_\infty = R_I \gamma^{-1} \left(2\theta + \frac{\pi}{2} - \pi \frac{r}{R_I} \right).$$

Or, $\forall x \geq 1$, $\gamma(x) < \frac{\pi}{2}$, donc il faut choisir le paramètre θ en fonction de r de sorte que $2\theta - \pi \frac{r}{R_I} < 0$. L'angle θ utilisé est de la forme $2^{-s}\pi$ où $s \in \mathbb{N}$. Pour que les détections soient assez précises on souhaite que les régions soient les plus petites possibles, donc que s soit l'entier le plus grand possible.

L'entier s doit donc vérifier

$$s > \log_2 \frac{2R_I}{r}.$$

L'algorithme 3.2.2 résume la procédure, à reconduire pour tout rayon test r .

3.2.3 Extension au cas d'un modèle gaussien

Les résultats de géométrie stochastiques des théorèmes 3.2.1, 3.2.2 et 3.2.3 se généralisent dans le cas de droites distribuées selon le modèle (3.3). Pour cela on utilise la définition de fonction support d'un ensemble convexe.

Algorithm 1 Calculer la suite d_n des rayons des cercles concentriques

Entrée: r, R_I **Sortie:** $s, \theta, d_1, \dots, d_n$ $n \leftarrow 1$ $d_1 \leftarrow R_I$ $s \leftarrow \left\lceil \log_2 \frac{2R_I}{r} \right\rceil + 1$ $\theta \leftarrow 2^{-s}\pi$ $d_\infty \leftarrow R_I \gamma^{-1} \left(2\theta + \frac{\pi}{2} - \pi \frac{r}{R_I} \right)$ **Tant que** $d_n < d_\infty$ **faire** $n \leftarrow n + 1$ $d_n \leftarrow R_I \gamma^{-1} \left(\frac{\pi r}{R_I} + \gamma \left(\frac{d_{n-1}}{R_I} \right) - 2\theta \right)$ **Fin**

Définition 3.2.1 (Fonction support d'un ensemble convexe, [2]). Soit K un ensemble convexe borné. La fonction support de K est définie par

$$p(\varphi) = \sup\{\langle \mathbf{x}, \mathbf{e}_\varphi \rangle, \mathbf{x} \in K\}, \quad (3.20)$$

où \mathbf{e}_φ est le vecteur unitaire qui fait un angle $\varphi \in [0, 2\pi[$ avec l'axe horizontal.

Théorème 3.2.4 ([50] p.3). Le périmètre d'un ensemble convexe K de fonction support p est donné par

$$\text{Per } K = \int_0^{2\pi} p(\varphi) d\varphi. \quad (3.21)$$

Proposition 3.2.1 (Droites qui intersectent un convexe). La mesure sous g de l'ensemble des droites intersectant K s'écrit :

$$\mu_g(D \cap K \neq \emptyset) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi \left(\frac{p(\varphi) - r_M \cos(\theta_M - \varphi)}{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{-p(\varphi + \pi) - r_M \cos(\theta_M - \varphi)}{\sigma} \right) d\varphi,$$

où Φ est la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite donnée par :

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du.$$

Démonstration. Par définition de la fonction support il vient

$$\mu_g(D \cap K \neq \emptyset) = \int_{\varphi=0}^\pi \int_{-p(\varphi+\pi)}^{p(\varphi)} g(\rho, \varphi) d\rho d\varphi,$$

et avec le changement de variables $\rho \mapsto \frac{\rho - r_M \cos(\varphi - \theta_M)}{\sigma}$ on a

$$\mu_g(D \cap K \neq \emptyset) = \int_{\varphi=0}^\pi \frac{1}{\pi} \int_{(-p(\varphi+\pi) - r_M \cos(\varphi - \theta_M))/\sigma}^{(p(\varphi) - r_M \cos(\varphi - \theta_M))/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\rho^2/2} d\rho d\varphi. \quad \square$$

Les deux propositions suivantes sont des applications de la proposition 3.2.1 et seront utilisées pour le calcul du nombre de fausses alarmes.

Proposition 3.2.2 (Mesure des droites de l'image). *La mesure sous μ_g (donnée par la formule (3.4)) de l'ensemble des droites qui intersectent Ω est :*

$$\mu_g(D \cap \Omega \neq \emptyset) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi \left(\frac{R_I - r_M \cos \varphi}{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{-R_I - r_M \cos \varphi}{\sigma} \right) d\varphi,$$

où R_I est le rayon de l'image.

Démonstration. En utilisant la proposition 3.2.1, comme la fonction support de Ω est constante égale à R_I on a :

$$\begin{aligned} \mu_g(D \cap \Omega \neq \emptyset) &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi \left(\frac{R_I - r_M \cos(\varphi - \theta_M)}{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{-R_I - r_M \cos(\varphi - \theta_M)}{\sigma} \right) d\varphi \\ &= \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi \left(\frac{R_I - r_M \cos \varphi}{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{-R_I - r_M \cos \varphi}{\sigma} \right) d\varphi, \end{aligned}$$

car la fonction intégrée est π -périodique. La mesure $\mu_g(D \cap \Omega \neq \emptyset)$ ne dépend donc pas de θ_M . \square

Soit Q un point de l'image Ω , on note $B(Q, r)$ le disque de centre Q et de rayon r .

Proposition 3.2.3 (Ensemble des droites qui intersectent une région intérieure de l'image). *La mesure de l'ensemble des droites sous g qui intersectent $B(Q, r)$ est :*

$$\mu_g(D \cap B(Q, r) \neq \emptyset) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \Phi \left(\frac{r - d(M, Q) \cos \varphi}{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{-r - d(M, Q) \cos \varphi}{\sigma} \right) d\varphi,$$

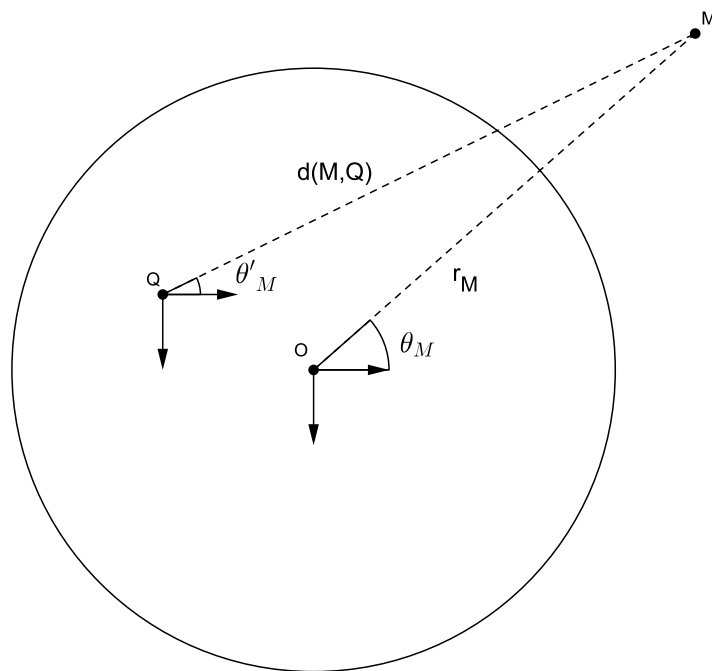
où $d(M, Q)$ est la distance signée du centre de convergence M à Q . Si (x_Q, y_Q) sont les coordonnées de Q et (x_M, y_M) celles de M , alors $d(M, Q)$ est égale à :

$$d(M, Q) = \begin{cases} \sqrt{(x_M - x_Q)^2 + (y_M - y_Q)^2} & \text{si } y_M \geq y_Q \\ -\sqrt{(x_M - x_Q)^2 + (y_M - y_Q)^2} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Comme dans la proposition (3.2.2) l'expression de $\mu_g(D \cap B(Q, r) \neq \emptyset)$ ne dépend pas de l'angle entre l'axe horizontal et la droite (MQ) .

Démonstration. C'est une conséquence directe de 3.2.1, quand on s'est placé dans le repère centré en Q , dans lequel la fonction support du disque $B(Q, r)$ est constante égale à r , Figure 3.6. En effet, quand on se place dans le repère centré en Q les coordonnées de la droite $D_{(\rho, \varphi)}$ deviennent

$$\begin{aligned} \rho' &= \rho - x_Q \cos \varphi + y_Q \sin \varphi, \\ \varphi' &= \varphi. \end{aligned}$$

FIGURE 3.6 – Illustration de la translation du repère au point Q .

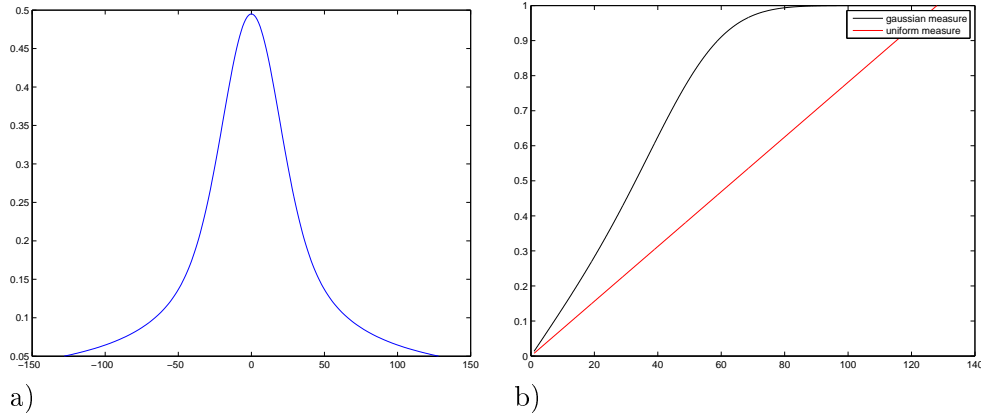


FIGURE 3.7 – a) Mesure de l'ensemble des droites qui rencontrent $B(\mathbf{x}, r)$ sous la mesure gaussienne en fonction de la distance $d(M, \mathbf{x})$ entre \mathbf{x} et le point de convergence M . La taille du disque r est fixée égale à 10. b) La même mesure vue en tant que fonction du rayon r tandis que le point \mathbf{x} est fixe, et tel que $d(M, \mathbf{x}) = 50$. Le paramètre σ est fixé à 15 et le rayon de l'image 128.

La densité sur le couple (ρ', φ') s'écrit alors

$$(\rho', \varphi') \mapsto g(\rho' + x_Q \cos \varphi' - y_Q \sin \varphi', \varphi') = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(\rho' + x_Q \cos \varphi' - y_Q \sin \varphi' - x_M \cos \varphi' + y_M \sin \varphi')^2 / 2\sigma^2}, \quad (3.22)$$

On peut écrire cette densité sous la forme

$$(\rho', \varphi') \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(\rho' - d(M, Q) \cos(\theta'_M - \varphi'))^2 / 2\sigma^2}, \quad (3.23)$$

où $d(M, Q)$ est la distance signée entre M et Q et où $\theta'_M \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est l'angle entre l'horizontale et la droite (MQ) (Figure 3.6). □

La figure 3.7 illustre la proposition 3.2.3. Elle montre que la mesure de l'ensemble des droites qui intersectent le disque $B(\mathbf{x}, r)$ décroît vite avec la distance $d(M, \mathbf{x})$ du point de convergence M au point \mathbf{x} . Sur le deuxième graphique on voit qu'elle croît plus vite avec le rayon r que ne le fait la mesure uniforme. Quand le rayon r devient supérieur à $d(M, \mathbf{x})$ la mesure de l'ensemble des droites qui intersectent $B(\mathbf{x}, r)$ est très proche de 1.

On s'intéresse désormais à la mesure de l'ensemble des droites (sous g) qui intersectent deux convexes distincts. Lors de la détection a contrario le calcul du nombre de fausses alarmes d'une région test V utilise la probabilité qu'une droite de l'image intersecte la région V , cette probabilité conditionnelle utilise la mesure de l'ensemble des droites qui intersectent les deux convexes Ω et V .

Proposition 3.2.4 (Ensemble des droites intersectant deux convexes). *Soient K_1 et K_2 deux ensembles convexes bornés de fonctions support p_1 and p_2 respectivement.*

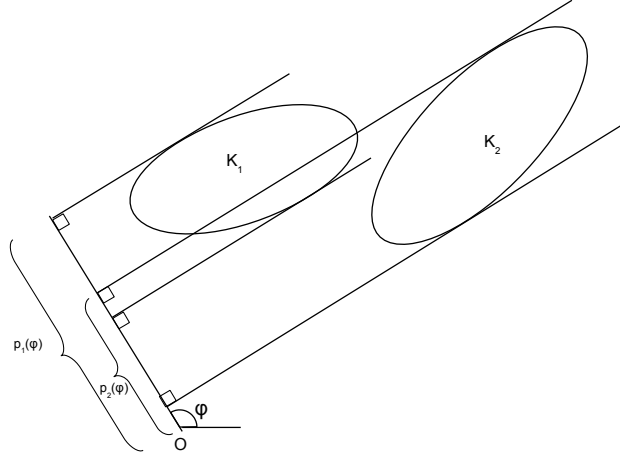


FIGURE 3.8 – Faisceau de droites parallèles d'angle φ intersectant deux convexes K_1 et K_2 de fonctions support p_1 et p_2 .

La mesure de l'ensemble des droites intersectant K_1 et K_2 s'écrit :

$$\mu_g(D \cap K_1 \cap K_2 \neq \emptyset) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \mathbb{1}_{\{\alpha(\varphi) \leq \beta(\varphi)\}} \left[\Phi \left(\frac{\beta(\varphi) - r_M \cos(\theta_M - \varphi)}{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{\alpha(\varphi) - r_M \cos(\theta_M - \varphi)}{\sigma} \right) \right] d\varphi,$$

où les deux fonctions α et β sont définies par :

$$\begin{aligned} \alpha(\varphi) &= \max(-p_1(\varphi + \pi), -p_2(\varphi + \pi)) \\ \beta(\varphi) &= \min(p_1(\varphi), p_2(\varphi)). \end{aligned}$$

Démonstration. Comme le montre la figure 3.8 les droites d'angle φ qui intersectent les deux convexes K_1 et K_2 sont celles satisfaisant les conditions :

$$\begin{aligned} -p_1(\varphi + \pi) &\leq \rho \leq p_1(\varphi) \\ -p_2(\varphi + \pi) &\leq \rho \leq p_2(\varphi). \end{aligned}$$

Ces conditions sont compatibles si et seulement si $\alpha(\varphi) \leq \beta(\varphi)$. En cas de compatibilité elles se résument à la seule condition

$$\alpha(\varphi) \leq \rho \leq \beta(\varphi). \quad (3.24)$$

Puis en intégrant sur φ :

$$\mu_g(D \cap K_1 \cap K_2 \neq \emptyset) = \int_{\varphi=0}^{\pi} \mathbb{1}_{\{\alpha(\varphi) \leq \beta(\varphi)\}} \int_{\alpha(\varphi)}^{\beta(\varphi)} g(\rho, \varphi) d\rho d\varphi. \quad \square$$

Nous utilisons la proposition précédente pour calculer la mesure de l'ensemble des droites qui intersectent le domaine de l'image Ω et une région extérieure V , qui serait une portion de secteur angulaire délimitée par deux cercles concentriques centrés en O , Figure 3.9.

Proposition 3.2.5. *Soit V une région extérieure et d_1, d_2 les rayons des cercles délimitant V . La précision angulaire de V est 2θ et V est délimitée par les angles $\Theta + \theta$ et $\Theta - \theta$.*

$$\mu_g(D \cap V \cap \Omega \neq \emptyset) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \mathbb{1}_{\{\alpha(\varphi) \leq \beta(\varphi)\}} \left[\Phi \left(\frac{\beta(\varphi) - r_M \cos(\theta_M - \varphi)}{\sigma} \right) - \Phi \left(\frac{\alpha(\varphi) - r_M \cos(\theta_M - \varphi)}{\sigma} \right) \right] d\varphi, \quad (3.25)$$

où $\alpha(\varphi)$ et $\beta(\varphi)$ sont deux fonctions des projections orthogonales des sommets de V sur la droite passant par le centre de l'image et faisant un angle φ avec l'axe horizontal :

$$\begin{aligned} \alpha(\varphi) &= \max(-R_I, \min_{d \in \{d_1, d_2\}} \{d \cos(\Theta \pm \theta - \varphi)\}) \\ \beta(\varphi) &= \min(R_I, \max_{d \in \{d_1, d_2\}} \{d \cos(\Theta \pm \theta - \varphi)\}). \end{aligned}$$

Pour illustrer la proposition précédente, on a représenté Figure 3.10 une région extérieure du pavage et le domaine de l'image d'une part, ainsi que l'ensemble des couples (ρ, φ) des coordonnées polaires des droites qui intersectent le domaine de l'image et la région représentée.

Les dernières régions du pavage extérieur ne sont pas bornées, pour ce type de région, l'expression de $\mu_g(D \cap \Omega \cap V \neq \emptyset)$ est la même, mais les définitions de $\alpha(\varphi)$ et $\beta(\varphi)$ diffèrent légèrement :

$$\begin{aligned} \alpha(\varphi) &= \max(-R_I, \min\{d \cos(\Theta \pm \theta - \varphi)\}) \\ \beta(\varphi) &= \min(R_I, \max\{d \cos(\Theta \pm \theta - \varphi)\}), \end{aligned}$$

où d est le rayon du dernier cercle partitionnant l'extérieur du domaine de l'image.

3.2.4 Etude asymptotique du modèle gaussien

Nous donnons ici le comportement asymptotique du modèle gaussien (3.3) lorsque son paramètre σ tend vers 0 ou vers $+\infty$ ainsi que lorsque r_M tend vers $+\infty$.

Le paramètre σ^2 est la variance de la distance (signée) $\tilde{\rho}$ d'une droite au point de convergence M . Plus σ est petit plus les droites sont proches de M , et plus σ est grand plus elles peuvent être éloignées de M . Les deux propositions suivantes donnent les cas limites si $\sigma \rightarrow +\infty$ et si $\sigma \rightarrow 0$. On peut déjà intuitivement les résultats qui vont suivre. Lorsque σ croît la convergence vers le point M est de moins en moins marquée, le caractère anisotrope du modèle est de moins en moins visible,

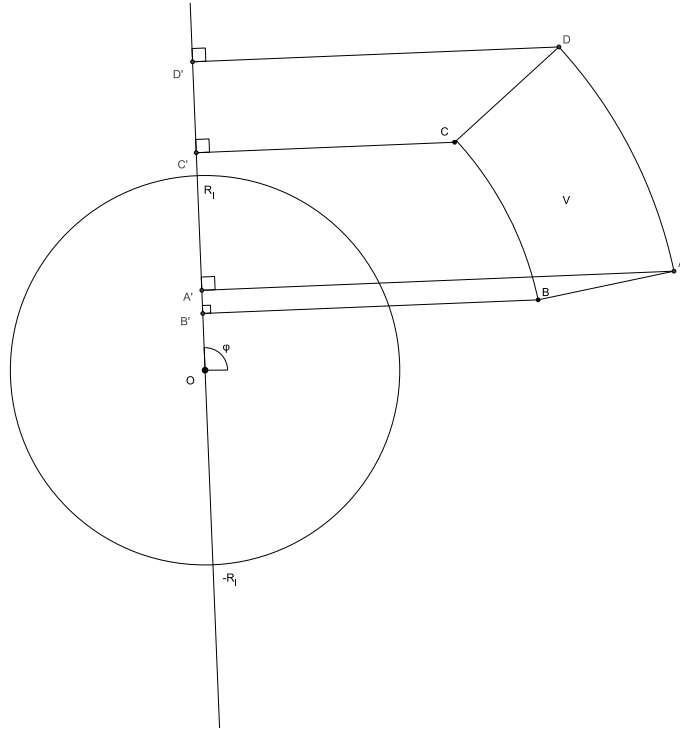


FIGURE 3.9 – Projections des quatre sommets d’une région V sur la droite d’angle φ avec l’axe horizontal. Les droites d’angle φ qui rencontrent V et l’image sont telles que $-R_I \leq \rho \leq R_I$ et $\min_{i \in \{1, \dots, 4\}} t_i(\varphi) \leq \rho \leq \max_{i \in \{1, \dots, 4\}} t_i(\varphi)$ où $t_i(\varphi)$ sont les distances signées de l’origine aux projections des sommets de V sur la droite $\mathbb{R}\mathbf{e}_\varphi$. Ici $\alpha(\varphi) = \max_{i \in \{1, \dots, 4\}} (-R_I, \min_{i \in \{1, \dots, 4\}} t_i(\varphi))$ et $\beta(\varphi) = \min_{i \in \{1, \dots, 4\}} (R_I, \max_{i \in \{1, \dots, 4\}} t_i(\varphi))$.

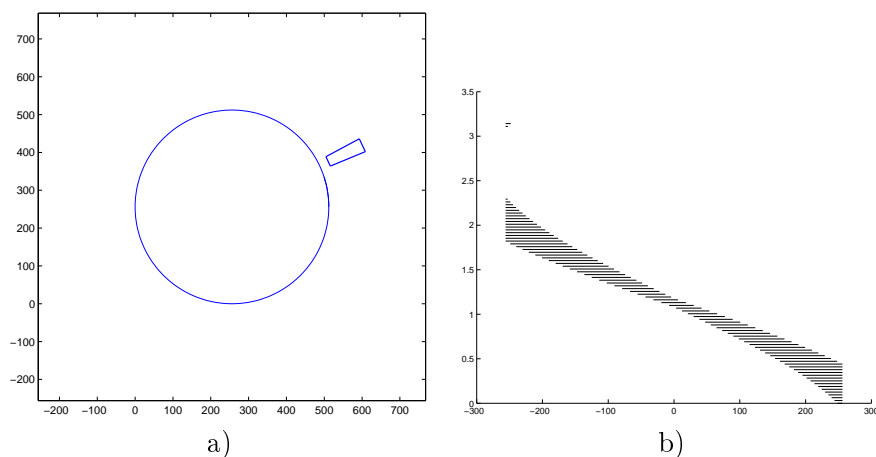


FIGURE 3.10 – a) Le domaine de l'image (cercle de rayon $R_I = 256$) et une région extérieure dans le plan de l'image délimitée par des arcs de cercles de rayons $d = 281$ et $d' = 381$. La précision angulaire de la région est $\theta = \frac{\pi}{64}$. b) La même région, vue dans l'espace des coordonnées des droites $[-R_I, R_I] \times [0, \pi[$, la partie hachurée est l'ensemble des couples (ρ, φ) tels que la droite de coordonnées (ρ, φ) intersecte le domaine de l'image et la région. Si on applique une rotation à la région dans l'image de gauche, cela induit une translation de la région hachurée dans l'image de droite. Sous le modèle uniforme, la probabilité qu'une droite de l'image intersecte cette région est égale au quotient de l'aire hachurée par l'aire totale $2\pi R_I$. Contre le modèle gaussien cette probabilité est l'intégrale sur le domaine hachuré de la densité $g : (\rho, \varphi) \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(\rho - r_M \cos(\varphi - \theta_M))^2 / 2\sigma^2}$.

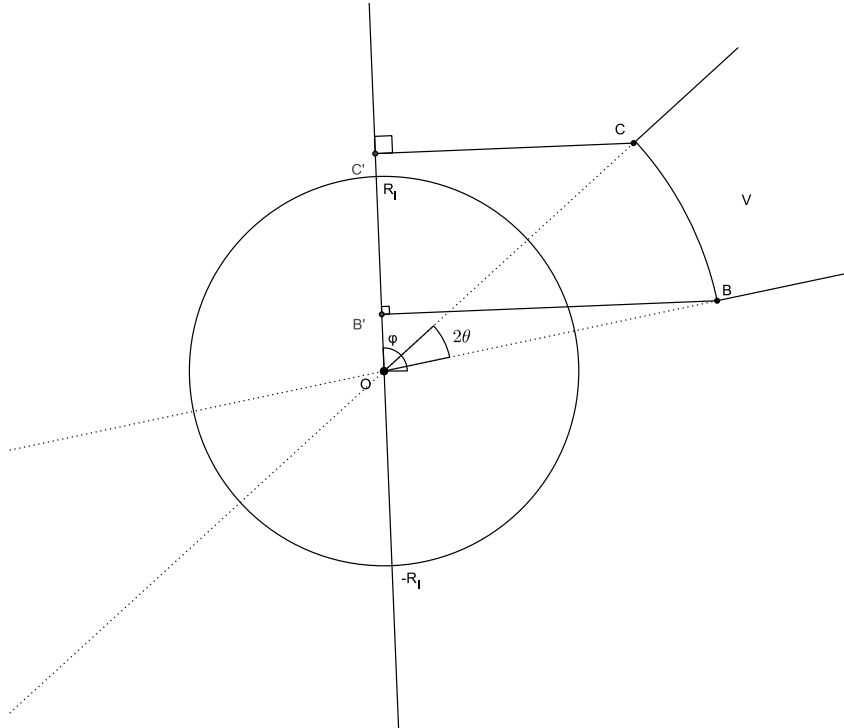


FIGURE 3.11 – Projections des deux sommets d’une région V non bornée sur la droite faisant un angle φ avec l’axe horizontal. Les droites d’angle φ qui rencontrent V et l’image sont telles que $-R_I \leq \rho \leq R_I$ et $\min_{i \in \{1,2\}} t_i(\varphi) \leq \rho \leq \max_{i \in \{1,2\}} t_i(\varphi)$ où $t_i(\varphi)$ sont les distances signées de l’origine aux projections des sommets de V sur la droite $\mathbb{R}\mathbf{e}_\varphi$.

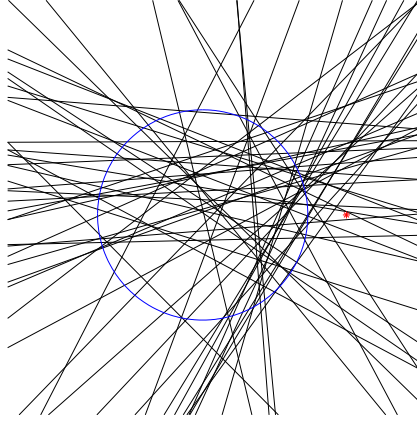


FIGURE 3.12 – Comportement de la mesure gaussienne sur les droites lorsque la variance σ^2 tend vers $+\infty$. On a représenté le point de convergence en rouge et le domaine de l'image délimité par le cercle bleu de rayon 256. Les droites ont été simulées avec $\sigma = 200$. La convergence des droites vers le point $M(356, 0)$ n'est pas évidente, les droites donnent l'impression de suivre la mesure uniforme.

la distribution des droites tend vers le modèle uniforme (Figure 3.12). Inversement, plus la variance est petite, plus les droites distribuées selon le modèle gaussien se rapprochent du point de convergence M . A la limite, toutes les droites passent exactement par le point M (Figure 3.13).

Proposition 3.2.6 (Quand la variance tend vers $+\infty$). *Quand la variance σ^2 tend vers $+\infty$ la fonction densité g tend vers la densité uniforme au sens suivant : pour tout convexe borné K dans le plan*

$$\frac{\mu_g(D \cap K \neq \emptyset)}{\mu_g(D \cap \Omega \neq \emptyset)} \xrightarrow{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\text{Per } K}{2\pi R_I} = \frac{\mu_1(D \cap K \neq \emptyset)}{\mu_1(D \cap \Omega \neq \emptyset)}. \quad (3.26)$$

Démonstration. La preuve utilise le développement de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite Φ au voisinage de 0. Pour tout $x > 0$ on a

$$\Phi(x) = \Phi(0) + x\Phi'(0) + \int_0^x (x-t)\Phi''(t)dt = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}}x + \int_0^x (x-t)\Phi''(t)dt.$$

D'où en remplaçant x par $\frac{p(\varphi) - r_M \cos(\theta_M - \varphi)}{\sigma}$ dans un premier temps, puis par $\frac{-p(\varphi + \pi) - r_M \cos(\theta_M - \varphi)}{\sigma}$ on obtient :

$$\Phi\left(\frac{p(\varphi) - r_M \cos(\theta_M - \varphi)}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{p(\varphi) - r_M \cos(\theta_M - \varphi)}{\sigma} + R_1(\varphi) \quad (3.27)$$

$$\Phi\left(\frac{-p(\varphi + \pi) - r_M \cos(\theta_M - \varphi)}{\sigma}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{-p(\varphi + \pi) - r_M \cos(\theta_M - \varphi)}{\sigma} + R_2(\varphi), \quad (3.28)$$

avec

$$\begin{aligned}
|R_1(\varphi)| &= \left| \int_0^{\frac{p(\varphi) - r_M \cos(\theta_M - \varphi)}{\sigma}} \left(\frac{p(\varphi) - r_M \cos(\theta_M - \varphi)}{\sigma} - t \right) \Phi''(t) dt \right| \\
&\leq \frac{\|\Phi''\|_\infty (\|p\|_\infty + |r_M|)^2}{2\sigma^2} \\
|R_2(\varphi)| &= \left| \int_0^{\frac{-p(\varphi + \pi) - r_M \cos(\theta_M - \varphi)}{\sigma}} \left(\frac{-p(\varphi + \pi) - r_M \cos(\theta_M - \varphi)}{\sigma} - t \right) \Phi''(t) dt \right| \\
&\leq \frac{\|\Phi''\|_\infty (\|p\|_\infty + |r_M|)^2}{2\sigma^2}.
\end{aligned}$$

Puisque les fonctions Φ'' et p sont bornées, on peut majorer l'intégrale par des bornes proportionnelles à $\frac{1}{\sigma^2}$.

La différence entre les membres de gauche des équations (3.27) et (3.28) s'écrit :

$$\Phi\left(\frac{p(\varphi) - r_M \cos(\theta_M - \varphi)}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-p(\varphi + \pi) - r_M \cos(\theta_M - \varphi)}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{p(\varphi) + p(\varphi + \pi)}{\sigma} + R(\varphi),$$

où $R(\varphi)$ est la fonction définie par

$$|R(\varphi)| = |R_1(\varphi) - R_2(\varphi)| \leq \frac{\|\Phi''\|_\infty (\|p\|_\infty + |r_M|)^2}{\sigma^2}.$$

La mesure de l'ensemble des droites intersectant le convexe K sous g s'écrit :

$$\mu_g(D \cap K \neq \emptyset) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{p(\varphi) + p(\varphi + \pi)}{\sigma} + R(\varphi) d\varphi \quad (3.29)$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^\pi (p(\varphi) + p(\varphi + \pi)) d\varphi + \frac{1}{\pi} \int_0^\pi R(\varphi) d\varphi \quad (3.30)$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_0^{2\pi} p(\varphi) d\varphi + O\left(\frac{1}{\sigma^2}\right). \quad (3.31)$$

Grâce au théorème 3.2.4 on voit que le premier terme est $\frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \text{Per } K$. En utilisant ce résultat avec $K = \Omega$ le domaine de l'image (qui est borné) on obtient :

$$\mu_g(D \cap \Omega) = \frac{1}{\pi} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \text{Per } \Omega + O\left(\frac{1}{\sigma^2}\right).$$

Donc

$$\frac{\mu_g(D \cap K \neq \emptyset)}{\mu_g(D \cap \Omega \neq \emptyset)} \xrightarrow{\sigma \rightarrow +\infty} \frac{\text{Per } K}{2\pi R_I}. \quad \square$$

Proposition 3.2.7 (Quand la variance tend vers 0). *Quand la variance σ^2 tend vers 0 la densité g_σ tend vers la densité $h(\rho, \varphi) = \frac{1}{\pi} \delta_{\rho=r_M \cos(\theta_M - \varphi)}$ dans le sens suivant : pour tout convexe borné et régulier (ie de fonction support différentiable) K dans le plan*

$$\mu_{g_\sigma}(D \cap K \neq \emptyset) \xrightarrow{\sigma \rightarrow 0} \mu_h(D \cap K \neq \emptyset).$$

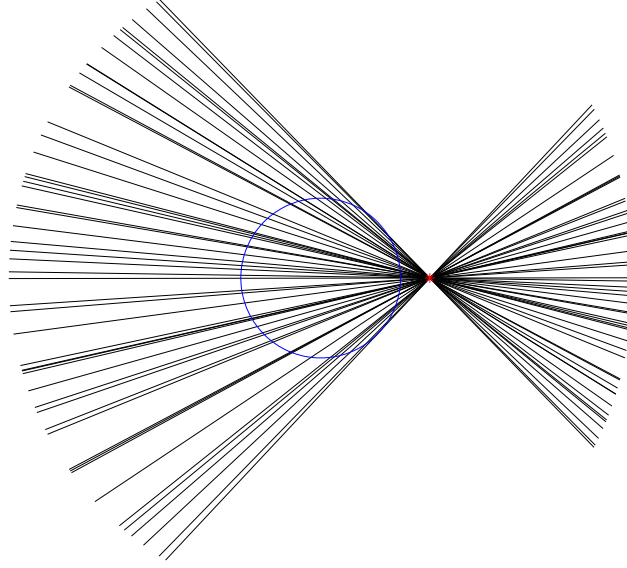


FIGURE 3.13 – Comportement asymptotique de la mesure gaussienne sur les droites lorsque σ tend vers 0. Le paramètre utilisé pour la simulation est $\sigma = 0.01$ et on a représenté le point de convergence en rouge. On voit que les droites sont très proches du point de convergence. Cette tendance s'accroît lorsque $\sigma \rightarrow 0$.

Lemme 3.2.1. *Pour toute fonction w continue par morceaux et bornée sur \mathbb{R}*

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0+} \int_{\mathbb{R}} w(x) g_{\sigma}(x) dx = \frac{w(0^+) + w(0^-)}{2}.$$

Démonstration du lemme. En effectuant le changement de variable $u = \frac{x}{\sigma}$ l'intégrale de gauche devient

$$\int_{\mathbb{R}} w(x) g_{\sigma}(x) dx = \int_{\mathbb{R}} w(\sigma u) g_1(u) du.$$

On a alors :

$$\int_{\mathbb{R}} w(\sigma u) g_1(u) du - \frac{w(0^+) + w(0^-)}{2} = \int_{\mathbb{R}} \left(w(\sigma u) - \frac{w(0^+) + w(0^-)}{2} \right) g_1(u) du.$$

Si w est continue en 0 la fonction $u \mapsto \left(w(\sigma u) - \frac{w(0^+) + w(0^-)}{2} \right) g_1(u)$ converge simplement vers la fonction nulle. Sinon, elle converge simplement vers la fonction

$$u \mapsto \begin{cases} \frac{w(0^-) - w(0^+)}{2} g_1(u), & \forall u < 0 \\ \frac{w(0^+) - w(0^-)}{2} g_1(u), & \forall u > 0. \end{cases}$$

Dans les deux cas la limite est d'intégrale nulle. De plus on a la majoration

$$\left(w(\sigma u) - \frac{w(0^+) + w(0^-)}{2} \right) g_1(u) \leq 2 \|w\|_{\infty} g_1(u), \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

qui nous permet de conclure grâce au théorème de convergence dominée.

□

Démonstration. La mesure de l'ensemble des droites D intersectant le convexe K s'écrit :

$$\mu_{g_\sigma}(D \cap K \neq \emptyset) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-p(\varphi+\pi)-r_M \cos(\theta_M-\varphi), p(\varphi)-r_M \cos(\theta_M-\varphi)]}(\rho) g_\sigma(\rho) d\rho d\varphi,$$

où on a utilisé la fonction support p de K .

Grâce au lemme 3.2.1 on a $\forall \varphi \in [0, \pi[$

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \mathbb{1}_{[-p(\varphi+\pi)-r_M \cos(\theta_M-\varphi), p(\varphi)-r_M \cos(\theta_M-\varphi)]}(\rho) g_\sigma(\rho) d\rho := \lim_{\sigma \rightarrow 0^+} H_\sigma(\varphi) = H(\varphi),$$

où la fonction H est définie par :

$$H(\varphi) = \begin{cases} 0 & \text{si } 0 \notin [-p(\varphi+\pi)-r_M \cos(\theta_M-\varphi), p(\varphi)-r_M \cos(\theta_M-\varphi)] \\ \frac{1}{2} & \text{si } 0 = -p(\varphi+\pi)-r_M \cos(\theta_M-\varphi) \text{ ou } 0 = p(\varphi)-r_M \cos(\theta_M-\varphi) \\ 1 & \text{si } 0 \in]-p(\varphi+\pi)-r_M \cos(\theta_M-\varphi), p(\varphi)-r_M \cos(\theta_M-\varphi)[. \end{cases}$$

De plus, comme la fonction H_σ converge simplement vers H et comme $\forall \varphi \in [0, \pi[, \forall \sigma > 0, |H_\sigma(\varphi)| \leq 1$, il vient par le théorème de convergence dominée

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \int_0^\pi H_\sigma(\varphi) d\varphi = \int_0^\pi H(\varphi) d\varphi.$$

On a donc :

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \mu_{g_\sigma}(D \cap K \neq \emptyset) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi H(\varphi) d\varphi. \quad (3.32)$$

Explicitons la dernière intégrale.

$$\begin{aligned} \int_0^\pi H(\varphi) d\varphi &= \int_0^\pi \mathbb{1}_{]-p(\varphi+\pi)-r_M \cos(\theta_M-\varphi), p(\varphi)-r_M \cos(\theta_M-\varphi)[}(0) \\ &\quad + \frac{1}{2} (\delta_{\{-p(\varphi+\pi)-r_M \cos(\theta_M-\varphi)\}}(0) + \delta_{\{p(\varphi)-r_M \cos(\theta_M-\varphi)\}}(0)) d\varphi \\ &= \ell\{\varphi \in [0, \pi[, -p(\varphi+\pi) < r_M \cos(\theta_M-\varphi) < p(\varphi)\} \\ &\quad + \frac{1}{2} \ell\{\varphi \in [0, \pi[, -p(\varphi+\pi) = r_M \cos(\theta_M-\varphi) \text{ ou } p(\varphi) = r_M \cos(\theta_M-\varphi)\} \\ &= \int_0^\pi \int_{-p(\varphi+\pi)}^{p(\varphi)} \mathbb{1}_{\{\rho = r_M \cos(\theta_M-\varphi)\}} d\rho d\varphi, \end{aligned}$$

puisque le terme $\ell\{\varphi \in [0, \pi[, -p(\varphi+\pi) = r_M \cos(\theta_M-\varphi) \text{ ou } p(\varphi) = r_M \cos(\theta_M-\varphi)\}$ (ℓ désigne la mesure de Lebesgue) est nul pour un convexe régulier : c'est la mesure de Lebesgue de l'ensemble des angles φ pour lesquels l'une au moins des tangentes $D_{(p(\varphi), \varphi)}$ et $D_{(-p(\varphi+\pi), \varphi)}$ au convexe K passe par le point M . Or, pour un convexe régulier cela ne peut se produire pour tout un intervalle de valeurs φ .

Finalement

$$\lim_{\sigma \rightarrow 0^+} \mu_{g_\sigma}(D \cap K \neq \emptyset) = \int_0^\pi \int_{-p(\varphi+\pi)}^{p(\varphi)} h(\rho, \varphi) d\rho d\varphi = \mu_h(D \cap K \neq \emptyset). \quad \square$$

La distribution limite lorsque σ tend vers 0 est telle que la loi marginale de φ est la loi uniforme sur $[0, \pi[$ et telle que toute droite (ρ, φ) passe par le point M .

Supposons à présent que le point de convergence M des droites est éloigné progressivement du domaine de l'image, mais dans la direction θ_M fixe. Considérons l'ensemble des droites sous la mesure gaussienne qui intersectent le domaine de l'image. Etant donné qu'elles doivent rester globalement à la même distance du point M alors que celui-ci est éloigné de l'image, l'ensemble des angles φ tels que ces droites intersectent le domaine de l'image va être restreint progressivement, pour à la limite, lorsque M est à l'infini, devenir le singleton $\theta_M + \frac{\pi}{2}$ si $\theta_M < \frac{\pi}{2}$ et $\theta_M - \frac{\pi}{2}$ sinon (Figure 3.14). La loi limite lorsque $r_M \rightarrow +\infty$ est donc supportée par les couples (ρ, φ_0) , $\rho \in [-R_I, R_I]$, et où $\varphi_0 \in [0, \pi[$ est égal à $\theta_M + \frac{\pi}{2}$ si $\theta_M < \frac{\pi}{2}$ et à $\theta_M - \frac{\pi}{2}$ sinon.

Proposition 3.2.8 (Quand le paramètre r_M tend vers $+\infty$). *Quand $r_M \rightarrow +\infty$ la densité $g_{r_M, \sigma}$ tend vers la densité de probabilité*

$$z(\rho, \varphi) = e^{-\rho^2/2\sigma^2} \delta_{(\varphi=\varphi_0)},$$

au sens suivant : pour tout convexe borné K

$$\frac{\mu_{g_{r_M, \sigma}}(D \cap K \neq \emptyset)}{\mu_{g_{r_M, \sigma}}(D \cap \Omega \neq \emptyset)} \xrightarrow{r_M \rightarrow +\infty} \frac{\mu_z(D \cap K \neq \emptyset)}{\mu_z(D \cap \Omega \neq \emptyset)} = \frac{\int_{-p(\varphi_0+\pi)}^{p(\varphi_0)} e^{-\rho^2/2} d\rho}{\int_{-R_I}^{R_I} e^{-\rho^2/2} d\rho}, \quad (3.33)$$

où $\varphi_0 = \theta_M + \frac{\pi}{2}$ si $\theta_M < \frac{\pi}{2}$ et $\varphi_0 = \theta_M - \frac{\pi}{2}$ sinon.

Démonstration. On peut supposer sans perte de généralité que $\theta_M < \frac{\pi}{2}$. On appelle p la fonction support d'un convexe borné K , alors p est une fonction continue bornée ([2], p.6).

$$\mu_{g_{r_M, \sigma}}(D \cap K \neq \emptyset) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \int_{-p(\varphi+\pi)}^{p(\varphi)} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(\rho - r_M \cos(\theta_M - \varphi))^2/2\sigma^2} d\rho d\varphi.$$

Quitte à changer r_M en $\frac{r_M}{\sigma}$, et p en $\frac{p}{\sigma}$ on peut supposer que $\sigma = 1$. On pose alors

$$\begin{aligned} I &= \int_0^\pi \int_{-p(\varphi+\pi)}^{p(\varphi)} e^{-(\rho - r_M \cos(\theta_M - \varphi))^2/2} d\rho d\varphi \\ &= \int_0^\pi e^{-r_M^2 \cos^2(\theta_M - \varphi)/2} \int_{-p(\varphi+\pi)}^{p(\varphi)} e^{\rho r_M \cos(\theta_M - \varphi)} e^{-\rho^2/2} d\rho d\varphi. \end{aligned}$$

Lemme 3.2.2. *La fonction $\varphi \mapsto f_{r_M}(\varphi) = \int_{-p(\varphi+\pi)}^{p(\varphi)} e^{\rho r_M \cos(\theta_M - \varphi)} e^{-\rho^2/2} d\rho$ est continue. En particulier $\lim_{\varphi \rightarrow \theta_M + \frac{\pi}{2}} f_{r_M}(\varphi) = f_{r_M}(\theta_M + \frac{\pi}{2}) = f(\theta_M + \frac{\pi}{2})$ où on a posé $f(\varphi) = \int_{-p(\varphi+\pi)}^{p(\varphi)} e^{-\rho^2/2} d\rho$.*

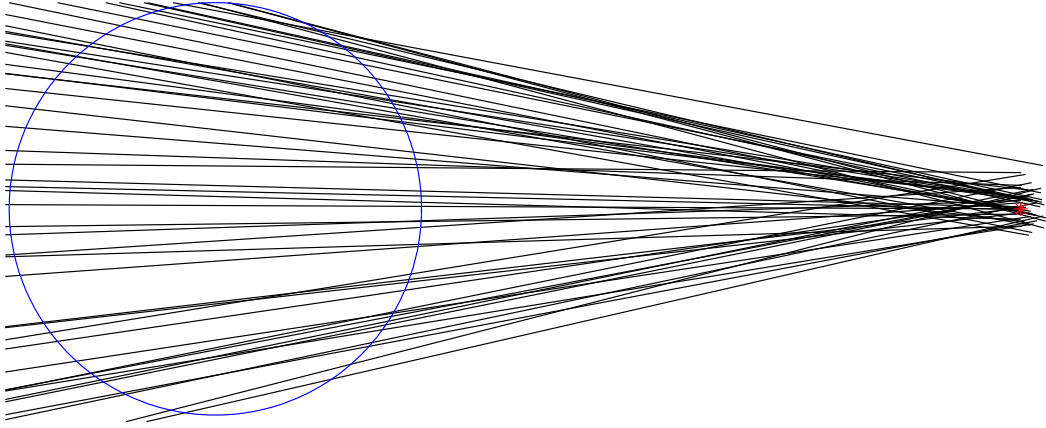


FIGURE 3.14 – Comportement asymptotique de la mesure gaussienne lorsque le point de convergence s'éloigne à l'infini ($r_M \rightarrow +\infty$). Les droites ont été simulées dans le domaine de l'image avec le paramètre $\sigma = 20$ et les coordonnées du point de convergence sont $(1000, 0)$. On a représenté le domaine de l'image par un cercle de rayon 256, et le point de convergence en rouge. On voit que les droites sont presque parallèles, d'angle φ proche de $\frac{\pi}{2}$, ce qui correspond à $\theta_M + \frac{\pi}{2}$ puisque ici $\theta_M = 0$.

La suite de la démonstration s'inspire de la méthode de Laplace (cf [17]). Soit $\varepsilon > 0$ et $\lambda > 0$. Il existe $\delta(\lambda) > 0$ tel que

$$\forall \varphi \in [0, \pi[, |\varphi - \theta_M - \frac{\pi}{2}| < \delta(\lambda) \Rightarrow (1 - \lambda)f(\theta_M + \frac{\pi}{2}) \leq f_{r_M}(\varphi) \leq (1 + \lambda)f(\theta_M + \frac{\pi}{2}).$$

De plus on a

$$\cos(\theta_M - \varphi) = -\sin(\varphi - \theta_M - \frac{\pi}{2}) \underset{\varphi \rightarrow \theta_M + \frac{\pi}{2}}{=} -(\varphi - \theta_M - \frac{\pi}{2}) + o(\varphi - \theta_M - \frac{\pi}{2}),$$

de sorte qu'il existe $\delta'(\lambda) > 0$ tel que

$$\forall \varphi \in [0, \pi[, |\varphi - \theta_M - \frac{\pi}{2}| < \delta'(\lambda) \Rightarrow (1 - \lambda)(-\varphi + \theta_M + \frac{\pi}{2})^2 \leq \cos^2(\theta_M - \varphi) \leq (1 + \lambda)(-\varphi + \theta_M + \frac{\pi}{2})^2.$$

En prenant $\delta = \min(\delta(\lambda), \delta'(\lambda))$ on a $\forall \varphi \in [0, \pi[$, si $|\varphi - \theta_M - \frac{\pi}{2}| < \delta$:

$$\begin{aligned} (1 - \lambda)f(\theta_M + \frac{\pi}{2})e^{-r_M^2(1+\lambda)(-\varphi - \theta_M - \frac{\pi}{2})^2/2} &\leq e^{-r_M^2 \cos^2(\theta_M - \varphi)/2} f_{r_M}(\varphi) \\ &\leq (1 + \lambda)f(\theta_M + \frac{\pi}{2})e^{-r_M^2(1-\lambda)(-\varphi - \theta_M - \frac{\pi}{2})^2/2}. \end{aligned}$$

Donc l'intégrale $I_\delta = \int_{\theta_M + \frac{\pi}{2} - \delta}^{\theta_M + \frac{\pi}{2} + \delta} e^{-r_M^2 \cos^2(\theta_M - \varphi)/2} f_{r_M}(\varphi) d\varphi$ est bornée par

$$(1 - \lambda)f(\theta_M + \frac{\pi}{2}) \int_{-\delta}^{\delta} e^{-r_M^2(1+\lambda)u^2/2} du \leq I_\delta \leq (1 + \lambda)f(\theta_M + \frac{\pi}{2}) \int_{-\delta}^{\delta} e^{-r_M^2(1-\lambda)u^2/2} du.$$

Lemme 3.2.3 ([17]). *Soit $\delta \in]0, +\infty]$. Pour tout $\alpha > -1$, $\beta > 0$, $c > 0$,*

$$\int_0^\delta x^\alpha e^{-ctx^\beta} dx \underset{t \rightarrow +\infty}{\sim} \Gamma\left(\frac{\alpha+1}{\beta}\right) \frac{1}{\beta(ct)^{\frac{\alpha+1}{\beta}}}.$$

Avec le lemme 3.2.3 on déduit qu'il existe $t_1 > 0$ tel que $\forall r_M > t_1$

$$\sqrt{1 - \frac{\varepsilon}{2} \frac{f(\theta_M + \frac{\pi}{2})}{r_M}} \sqrt{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{1 - \lambda}{1 + \lambda} \leq I_\delta \leq \sqrt{1 + \frac{\varepsilon}{2} \frac{f(\theta_M + \frac{\pi}{2})}{r_M}} \sqrt{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \frac{1 + \lambda}{1 - \lambda}.$$

On peut prendre $\lambda > 0$ (ainsi que $\delta(\lambda), \delta'(\lambda), \delta \dots$) tel que

$$\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{f(\theta_M + \frac{\pi}{2})}{r_M} \sqrt{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) \leq I_\delta \leq \left(1 + \frac{\varepsilon}{2}\right) \frac{f(\theta_M + \frac{\pi}{2})}{r_M} \sqrt{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right).$$

On définit l'intégrale

$$J_\delta = I - I_\delta = \int_{\varphi, |\varphi - \theta_M - \frac{\pi}{2}| > \delta} e^{-r_M^2 \cos^2(\theta_M - \varphi)/2} f_{r_M}(\varphi) d\varphi.$$

Et comme p est bornée, on peut majorer J_δ :

$$\begin{aligned} 0 \leq J_\delta &\leq \int_{\varphi, |\varphi - \theta_M - \frac{\pi}{2}| > \delta} e^{-r_M^2 \cos^2(\theta_M - \varphi)/2} e^{r_M \|p\|_\infty |\cos(\theta_M - \varphi)|} \int_{-p(\varphi + \pi)}^{p(\varphi)} e^{-\rho^2/2} d\rho d\varphi \\ &\leq \int_{\varphi, |\varphi - \theta_M - \frac{\pi}{2}| > \delta} e^{-r_M^2 \sin^2 \delta/2} e^{r_M \|p\|_\infty |\cos(\theta_M - \varphi)|} f(\varphi) d\varphi. \end{aligned}$$

Finalement il existe $t_2 > 0$ et $B, C > 0$ tels que $\forall r_M > t_2$

$$0 \leq J_\delta \leq \int_{\varphi, |\varphi - \theta_M - \frac{\pi}{2}| > \delta} e^{-r_M^2 \sin^2 \delta/2} f(\varphi) d\varphi \leq C e^{-B r_M^2} \leq \frac{\varepsilon}{2} \frac{f(\theta_M + \frac{\pi}{2})}{r_M} \sqrt{2\pi}.$$

On a montré que $\forall \varepsilon > 0$ il existe $t > 0$ tel que $\forall r_M > t$,

$$(1 - \varepsilon) \frac{1}{\pi} \frac{f(\theta_M + \frac{\pi}{2})}{r_M} \leq \mu_{g_{r_M}, \sigma}(D \cap K \neq \emptyset) \leq (1 + \varepsilon) \frac{1}{\pi} \frac{f(\theta_M + \frac{\pi}{2})}{r_M}.$$

Cela montre qu'un équivalent de $\mu_{g_{r_M}, \sigma}(D \cap K \neq \emptyset)$ lorsque r_M tend vers $+\infty$ est $\frac{f(\theta_M + \frac{\pi}{2})}{\pi r_M}$, où la fonction f dépend de l'ensemble convexe K .

Si on applique ce résultat au convexe Ω on obtient la limite du rapport

$$\frac{\mu_g(D \cap K \neq \emptyset)}{\mu_g(D \cap \Omega \neq \emptyset)} \xrightarrow{r_M \rightarrow +\infty} \frac{f_K\left(\theta_M + \frac{\pi}{2}\right)}{f_\Omega\left(\theta_M + \frac{\pi}{2}\right)}, \quad (3.34)$$

qui est exactement $\frac{\mu_z(D \cap K \neq \emptyset)}{\mu_z(D \cap \Omega \neq \emptyset)}$.

□

La loi limite de g_{r_M} lorsque r_M tend vers $+\infty$ est donc une loi pour laquelle ρ et φ sont indépendantes et telle que la marginale de ρ est la loi normale centrée de variance σ^2 et la loi marginale de φ est le dirac en $\theta_M + \frac{\pi}{2}$ ou en $\theta_M - \frac{\pi}{2}$ suivant la valeur de θ_M .

3.3 Détection a contrario de convergences de droites dans le plan d'une image

Cette section développe la méthodologie pour la détection de zones de convergence globale dans le plan de l'image. Intuitivement ces zones sont intersectées par un grand nombre de droites de l'image. La méthode a contrario choisie s'intéresse justement au nombre de droites qui intersectent chaque zone de convergence potentielle.

3.3.1 Evénements d'étude

On se donne une image dans laquelle on a observé N droites. On suppose que ces droites sont N réalisations indépendantes de la mesure μ_f (μ_f peut être par exemple μ_1 ou μ_g). Pour chaque région test V on compte le nombre $K(V)$ des droites de l'image qui l'intersectent. Alors $K(V)$ est la réalisation d'une variable aléatoire $K \sim \mathcal{B}(N, p_f(V))$ où $p_f(V)$ est la probabilité qu'une droite de l'image rencontre V . Sous le modèle uniforme $p_f(V)$ ne dépend pas de la région V , seulement de l'échelle de test r .

3.3.2 Nombre de fausses alarmes, événements significatifs

Définition 3.3.1. Soit V une région test. La probabilité qu'une droite de l'image Ω rencontre le convexe V sous la loi μ_f est définie par :

$$p_f(V) = \frac{\mu_f(D \cap V \cap \Omega \neq \emptyset)}{\mu_f(D \cap \Omega \neq \emptyset)}. \quad (3.35)$$

Le nombre de fausses alarmes associé à la région V est

$$\text{NFA}_f(V) = N_T B(N, K(V), p_f(V)), \quad (3.36)$$

où N_T est le nombre de tests, ie le cardinal de la famille des régions tests V , $K(V)$ est le nombre de droites (parmi les N droites de l'image) rencontrant la région V et

$B(l, k, p) := \sum_{j=k}^l \binom{l}{j} p^j (1-p)^{l-j}$ est la queue de la binomiale de paramètres l et p .

Soit $0 \leq \varepsilon \leq 1$. Si $\text{NFA}_f(V) \leq \varepsilon$, la région V est dite ε -significative contre la mesure μ_f . Les régions 1-significatives sont dites simplement significatives.

Comme le montre la définition (3.36) le nombre de fausses alarmes est le produit du nombre de tests, qui est généralement très grand, avec la queue de la binomiale qui en comparaison est petite, comme le paramètre $p_f(V)$ est souvent très petit.

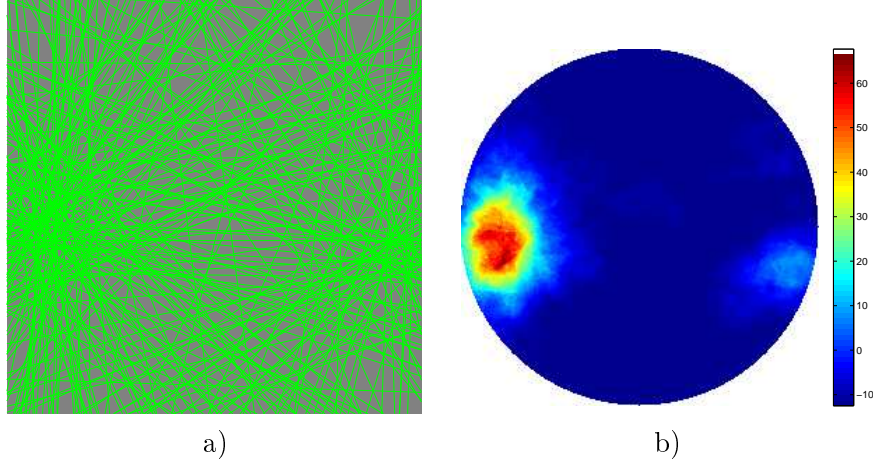


FIGURE 3.15 – Exemple des détections contre le modèle uniforme sur un exemple synthétique. a) Echantillon de $N = 300$ droites avec deux convergences visibles. Les droites ont été simulées suivant un modèle paramétrique de mélange à deux termes gaussiens et un terme uniforme. La première convergence se trouve en $(-100, 14)$, elle est affectée d'un poids 0.4 et du paramètre $\sigma = 20$, et la seconde est en $(114, 28)$ avec le poids 0.2 et $\sigma = 10$. La densité utilisée lors de la simulation est $(\rho, \varphi) \mapsto 0.4 \frac{1}{2\pi R_I} + 0.4 \frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(\rho+100\cos\varphi+14\sin\varphi)^2/2\sigma^2} + 0.2 \frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(\rho-114\cos\varphi+28\sin\varphi)^2/2\sigma^2}$. b) On a tracé $-\log \text{NFA}$ sur le domaine intérieur de l'image. La convergence principale est significative et est donc détectée tandis que le nombre de fausses alarmes de la seconde est beaucoup plus grand.

Cela conduit à des difficultés lors du calcul numérique, qui peuvent heureusement être évitées en utilisant l'approximation des grandes déviations [16] lorsque $\frac{K(V)}{N} \geq p_f(V)$:

$$\log \text{NFA}_f(V) \approx \log N_T - N \left[\frac{K(V)}{N} \log \frac{K(V)/N}{p_f(V)} + \left(1 - \frac{K(V)}{N} \right) \log \frac{1 - K(V)/N}{1 - p_f(V)} \right]. \quad (3.37)$$

3.4 Estimation de modèles anisotropes

3.4.1 Type de modèle cherché

Dans le but d'enrichir le modèle a contrario sur les droites on souhaite modéliser le fait que toutes les droites de l'image ou seulement une partie d'entre elles sont naturellement convergentes vers un point M . Cela est motivé par l'exemple des mammographies pour lesquelles on a vu que les structures linéaires représentant les spicules étaient naturellement orientées vers un point situé autour du tétou. Pour modéliser ces distributions empiriques particulières nous avons fait le choix d'un

modèle de mélange paramétrique, dont un terme est la mesure uniforme sur les droites de l'image et dont l'autre terme modélise une convergence principale des droites. Nous supposons donc que les droites d'une image sont distribuées selon la loi :

$$f_{p,\sigma}(\rho, \varphi) = \mathbb{1}_{\{D_{(\rho,\varphi)} \cap \Omega \neq \emptyset\}} \times \left[\frac{1-p}{\text{Per } \Omega} + \frac{p}{\pi\sqrt{2\pi}\sigma\mu_g(D \cap \Omega \neq \emptyset)} e^{-(\rho - x_M \cos \varphi + y_M \sin \varphi)^2 / 2\sigma^2} \right]. \quad (3.38)$$

Cette densité est un mélange de deux termes, le premier est la loi uniforme, et le second est le modèle gaussien que nous avons défini (3.3). Les deux mesures sont des mesures de probabilité, puisqu'elles sont conditionnées sur l'ensemble des droites qui rencontrent le domaine de l'image. La fonction $f_{p,\sigma}$ est donc aussi une densité de probabilité pour $(\rho, \varphi) \in [-R_I, R_I] \times [0, \pi[$. Le terme $\text{Per } \Omega$ désigne le périmètre de l'image de rayon R_I , c'est aussi la mesure $\mu_1(D \cap \Omega \neq \emptyset)$. μ_g désigne la mesure gaussienne sur les couples (ρ, φ) donnée par

$$d\mu_g(\rho, \varphi) = \frac{1}{\pi\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(\rho - x_M \cos \varphi + y_M \sin \varphi)^2 / 2\sigma^2} d\rho d\varphi, \quad (3.39)$$

où (x_M, y_M) sont les coordonnées d'un point M vers lequel les droites convergent avec la probabilité p . La constante $Z_\sigma = \mu_g(D \cap \Omega \neq \emptyset)$ est la constante de normalisation de la densité gaussienne : c'est la mesure sous g de l'ensemble des droites qui intersectent l'image. Elle a déjà été calculée dans l'équation (3.2.2).

3.4.2 Estimation du point de convergence globale

Nous cherchons lequel des modèles (3.38) approche le mieux la distribution empirique des droites d'une image donnée. Cela revient à estimer les paramètres M, p et σ . Il y a plusieurs façons de procéder que nous détaillons dans la suite. Nous nous plaçons dans le cadre d'images ayant un point de fuite principal ou dans celui des mammographies, dont les spicules convergent globalement vers le tétou, mais on peut envisager de façon plus générale des images dans lesquelles il n'y a pas une orientation privilégiée des structures linéaires et se demander quel modèle (3.38) explique le mieux la distribution des droites observées.

3.4.2.1 Point minimisant un critère L^2

On note (ρ_n, φ_n) , $\forall n = 1, \dots, N$, les coordonnées des N droites observées dans l'image. Si une droite $D_{(\rho,\varphi)}$ converge vers un point $M(x_M, y_M)$ la distance du point M à la droite D est assez petite. Partant de ce principe, on propose une première estimation du point de convergence principale :

$$\arg \min_{x_M, y_M} \sum_{n=1}^N (\rho_n - x_M \cos \varphi_n + y_M \sin \varphi_n)^2, \quad (3.40)$$

construite à partir des N droites $D_{(\rho_n, \varphi_n)}$, $\forall n = 1, \dots, N$, et des distances de chaque droite au point M , données par l'expression $|\rho_n - x_M \cos \varphi_n + y_M \sin \varphi_n|$.

Ce critère se reformule sous la forme d'une fonctionnelle elliptique. On peut implémenter la méthode de descente du gradient (à pas optimal par exemple) et on est assuré de sa convergence. L'inconvénient principal de cette méthode est sa sensibilité aux outliers. En effet, dans l'exemple des mammographies, toutes les spicules ne convergent pas vers le tétou. La distance de leurs droites support au point de convergence globale que représente le tétou est potentiellement très grande. Dans ce cas la minimisation du critère sur toutes les droites de l'image va donner un point très éloigné du point de convergence globale intuitif.

En pratique la minimisation de ce critère sur toutes les droites de l'image donne, dans le cas des mammographies, un point situé vers le centre de l'image.

Dès lors se pose le problème de la sélection des droites qui ont effectivement une orientation commune et d'ignorer celles qui ont une orientation isolée. La méthode utilisée en présence de nombreux outliers est l'algorithme de RANSAC [20].

Nous l'avons appliqué au problème de minimisation (3.40). On se donne l le nombre d'itérations et pour tout $n = 1, \dots, l$, on sélectionne k droites D_{i_1}, \dots, D_{i_k} parmi les N droites de l'image et on calcule le point q_n du domaine de l'image minimisant $\sum_{i=1}^k d(\mathbf{q}, D_{i_i})^2$. On détermine alors le nombre d'inliers pour \mathbf{q}_n , c'est-à-dire le nombre de droites parmi les N qui convergent vers \mathbf{q}_n à une certaine précision donnée. Si il y a trop peu d'inliers le point \mathbf{q}_n est oublié, dans le cas contraire il est réévalué par minimisation de la même somme, prise sur l'ensemble des droites inliers. On attribue ensuite à ce nouveau point \mathbf{q}_n une erreur calculée comme la moyenne des distances du point \mathbf{q}_n à ses droites inliers. De toutes les itérations on garde le point \mathbf{q}_n qui réalise la plus petite erreur.

L'inconvénient majeur de cette méthode d'estimation est qu'elle dépend de plusieurs paramètres (le nombre d'itération, la précision sur les droites, le seuil sur le nombre d'inliers...) qu'aucun critère ne vient valider.

3.4.2.2 Point le plus significatif

La région de fuite la plus significative contre le modèle uniforme, toutes échelles confondues, est une convergence principale de l'image. Le point le plus significatif est alors arbitrairement choisi comme le centre de la région la plus significative. Si celle-ci est non bornée, on la borne artificiellement par un dernier cercle de rayon d_∞ et on prend le centre de cette nouvelle région.

Ce point est celui vers lequel le plus grand nombre de droites convergent.

Une deuxième solution est donc d'utiliser la validation fournie par les méthodes a contrario et de définir le point de convergence globale d'une image comme le centre de la région la plus significative contre le modèle uniforme lors de la détection des régions de convergence. En effet, à r fixé la région la plus significative est celle vers laquelle il y a le plus de droites qui convergent. C'est aussi celle qui a le moins de chances d'être observée sous le modèle uniforme. Choisir le centre de la région la plus significative contre le modèle uniforme comme le point de convergence globale de l'image pour définir le modèle (3.38) est donc judicieux : s'il y a une convergence globale dans l'image, ce point est le plus plausible.

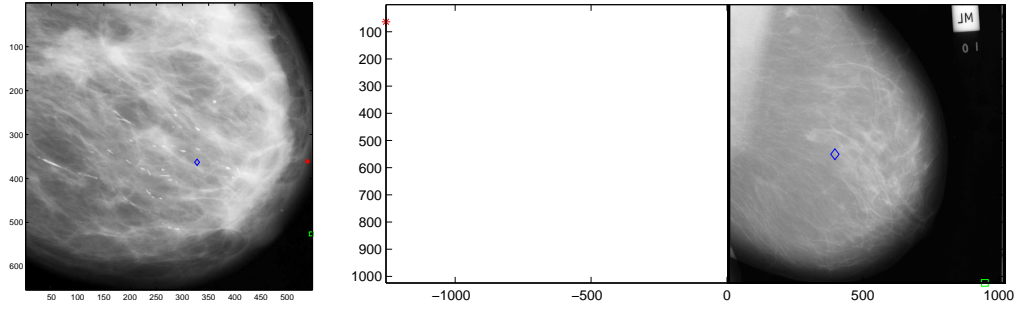


FIGURE 3.16 – Différentes estimations du point de convergence globale : en rouge c'est le point le plus significatif contre le modèle uniforme sur les droites $\arg \min \log \text{NFA}_1(V)$, en bleu c'est le point minimisant la somme $\sum_{n=1}^N d(D_n, M)^2$ et enfin en vert le point minimisant $\sum_{n=1}^N \sin^2 \varphi_n(M)$ où $\forall n = 1, \dots, N, \varphi_n(M)$ est l'angle entre le segment S_n et la droite $(S_n M)$. Cette dernière minoration est expliquée dans le Chapitre 5.

Dans la suite c'est cette méthode d'estimation que nous avons choisie.

3.4.3 Estimation du poids et de la variance

Une fois le point de convergence globale M choisi, il faut estimer les deux paramètres p et σ . Une solution est de maximiser la log-vraisemblance, afin de trouver parmi les densités $f_{p,\sigma}$ laquelle est la plus adaptée aux observations.

3.4.3.1 Par l'algorithme EM

L'estimation des paramètres du mélange (3.38) peut se faire via l'algorithme Expectation-Maximization. Dans le cas de mélanges de gaussiennes c'est un algorithme qui converge rapidement et donne de bonnes estimations des paramètres poids et variances.

On considère une image dont les N droites observées seraient issues d'un mélange de type (3.38). Nous voulons estimer p le poids du terme de convergence dans (3.38), par la proportion des droites qui suivent ce terme de convergence. Or il est impossible de déterminer quelles droites sont issues du terme uniforme et quelles droites sont issues du terme de convergence. Certaines droites issues du terme uniforme peuvent converger vers le point M au sens défini par la méthodologie a contrario. Inversement des droites qui suivent le terme de convergence modélisé par la densité g peuvent ne pas converger vers le point M . Il n'est donc pas possible d'estimer le paramètre p par la proportion des droites qui convergent vers le point M , d'autant que cette proportion dépendrait de l'échelle utilisée pour déterminer les convergences.

C'est dans ce cadre que s'utilise l'algorithme EM. On note $(D_n)_{n=1}^N = (\rho_n, \varphi_n)_{n=1}^N$ les observations et $z_n \in \mathbb{R}^2$ les variables cachées définies par $z_n = (1, 0)$ si la droite (ρ_n, φ_n) suit le terme uniforme, et $z_n = (0, 1)$ si elle suit le terme

gaussien. Les paramètres p, σ sont regroupés sous la variable Θ . L'espérance de la log-vraisemblance sur les données complètes s'écrit :

$$\mathbb{E}_{D,\Theta} \log \mathbb{P}(D, z|\Theta) = \sum_{n=1}^N \tau_n^1 [\log(1-p) - \log(2\pi R_I)] + \tau_n^2 \left[\log p - \log(\pi\sqrt{2\pi}\sigma) - \log(\mu_g(D \cap \Omega \neq \emptyset)) - \frac{(\rho_n - r_M \cos(\theta_M - \varphi_n))^2}{2\sigma^2} \right],$$

où $\tau_n^i = \mathbb{P}(z_n^i = 1|D_n, \Theta)$ est la probabilité a posteriori que la droite D_n suive le terme i du mélange. L'étape d'évaluation des τ_n^i est telle que dans le cas d'estimations de mélanges classiques. En revanche l'étape de *maximisation* est changée. La log-vraisemblance étant concave, on cherche à annuler ses dérivées en fonction des paramètres. La dérivation de l'espérance de la log-vraisemblance sur les données complètes par rapport au paramètre σ ne donne pas de formule close pour le paramètre σ réalisant le maximum. Cela est dû principalement au terme $\mu_g(D \cap \Omega \neq \emptyset)$ et à la complexité de sa dépendance vis-à-vis de σ . Pour cette raison nous n'avons pas choisi d'estimer ces paramètres par l'algorithme EM. La section suivante détaille la méthode d'estimation de p et σ que nous avons implémentée.

3.4.3.2 Par maximum de vraisemblance

Dans cette section nous proposons d'estimer les deux paramètres p et σ simultanément, en maximisant la log-vraisemblance vue comme une fonction des deux variables p et σ dépendant des données $(\rho_n, \varphi_n)_{1 \leq n \leq N}$. Cependant, dans les mammographies la taille de l'échantillon $(\rho_n, \varphi_n)_{1 \leq n \leq N}$ est de l'ordre de $N = 1000$, ce qui n'est pas suffisant pour calculer la log-vraisemblance empirique sur le couple (ρ, φ) . On préfère alors estimer la loi suivie par les observations $\tilde{\rho}_n = \rho_n - x_M \cos \varphi_n + y_M \sin \varphi_n$, qui dépend de p et σ , en maximisant la log-vraisemblance de la variable $\tilde{\rho}$, qui est la distance signée de la droite (ρ, φ) au point de convergence M .

La proposition suivante donne la loi de $\tilde{\rho}$ lorsque le couple (ρ, φ) suit le modèle de mélange (3.38). Elle est utilisée pour le calcul de la log-vraisemblance.

Proposition 3.4.1. *La loi de la variable $\tilde{\rho}$ est notée $h_{p,\sigma}$ et donnée par :*

$$h_{p,\sigma}(t) = \left[\frac{1-p}{2R_I} + \frac{p}{\sqrt{2\pi}\sigma\mu_g(D \cap \Omega \neq \emptyset)} e^{-t^2/2\sigma^2} \right] J(t), \quad (3.41)$$

où J est une fonction indépendante de p et de σ . En réalité J ne dépend que des paramètres géométriques R_I, x_M et y_M . On a $J(t) = \int_0^\pi \mathbb{1}_{\{|\tilde{\rho} - x_M \cos t + y_M \sin t| \leq R_I\}} dt$.

Démonstration. C'est une conséquence de la proposition 3.1.1. Calculons $J(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$. On note (r_M, θ_M) les coordonnées polaires du point M . Alors J s'écrit aussi, pour tout $t \in \mathbb{R}$:

$$J(t) = \int_0^\pi \mathbb{1}_{\{|t + r_M \cos(t - \theta_M)| \leq R_I\}} dt, \quad (3.42)$$

Quitte à changer t en $-t$ on peut supposer $r_M > 0$. Supposons $\theta_M = 0$. On peut s'y ramener par rotation du repère cartésien. Alors en faisant le changement de variables $u = \cos t$ on obtient :

$$J(t) = \int_{-1}^1 \mathbb{1}_{\{-\frac{R_I+t}{r_M} \leq u \leq \frac{R_I-t}{r_M}\}} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}}. \quad (3.43)$$

En posant $a(t) = \max(-1, -\frac{R_I+t}{r_M})$ et $b(t) = \min(1, \frac{R_I-t}{r_M})$ on a finalement

$$J(t) = \mathbb{1}_{\{a(t) \leq b(t)\}} (\arccos a(t) - \arccos b(t)). \quad (3.44)$$

□

La log-vraisemblance sur les observations $\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_N$ est alors

$$\mathcal{LL}(\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_N; p, \sigma) = \sum_{i=1}^N \log h_{p,\sigma}(\tilde{\rho}_i). \quad (3.45)$$

Elle est vue comme une fonction de deux variables et on trouve son maximum par recherche exhaustive après discrétisation en p et σ .

La procédure d'estimation du modèle de mélange (3.38) est résumée par l'algorithme suivant. Il est découpé en deux étapes distinctes, l'estimation du point de convergence, puis l'estimation des paramètres p et σ .

Algorithm 2 Estimation d'un modèle de mélange paramétrique

Entrée: $r_k, k = 1, \dots, N_s$; $(\rho_n, \varphi_n)_{n=1, \dots, N}$,

Sortie: $M, \hat{p}, \hat{\sigma}$

Pour $k = 1$ **to** N_s **faire**

Partition de $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega = \bigcup_{j=1}^{N_T^k} V_j^k$

Pour $V \in \{V_j^k\}_j$ **faire**

NFA₁(V)

Fin

Fin

$V^* \leftarrow \operatorname{argmin}_{k, V \in \{V_j^k\}_j} \text{NFA}_1(V)$

$(x_M, y_M) \leftarrow \text{centre de } \{V^*\}$

Pour $n = 1$ **to** N **faire**

$\tilde{\rho}_n \leftarrow \rho_n - x_M \cos \varphi_n + y_M \sin \varphi_n$

Fin

$(\hat{p}, \hat{\sigma}) = \operatorname{argmax}_{p, \sigma} \mathcal{LL}(\tilde{\rho}_1, \dots, \tilde{\rho}_N; p, \sigma)$

3.5 Exemples

Nous présentons un certain nombre d'exemples, de nature synthétique, des images naturelles ainsi que des mammographies. Pour chaque exemple on montre

1. l'image originale et l'ensemble des segments détectés (ou simulés),
2. l'ensemble des droites support,
3. la collection des N droites, caractérisées par leurs coordonnées polaires $\forall n \in \{1, \dots, N\} (\rho_n, \varphi_n) \in [-R_I, R_I] \times [0, \pi[$,
4. la log-vraisemblance sur les données $\tilde{\rho}_n, \forall n \in \{1, \dots, N\}$ fonction de (p, σ) ,
5. $-\log \text{NFA}_1$ le nombre de fausses alarmes pour chaque région intérieure (vu comme fonction du centre \mathbf{x} de la région) et/ou $-\log \text{NFA}_1(V)$ de chaque région extérieure significative V contre le modèle uniforme (la densité sur (ρ, φ) est la fonction constante égale à 1),
6. $-\log \text{NFA}_{f_{\tilde{p}, \tilde{\sigma}}}$ le nombre de fausses alarmes contre le modèle de mélange estimé.

La valeur de $-\log \text{NFA}(V)$ montre la significativité de la région V : si cette valeur est positive, la région est significative, elle l'est d'autant plus que $-\log \text{NFA}(V)$ est grand.

3.5.1 Exemples synthétiques

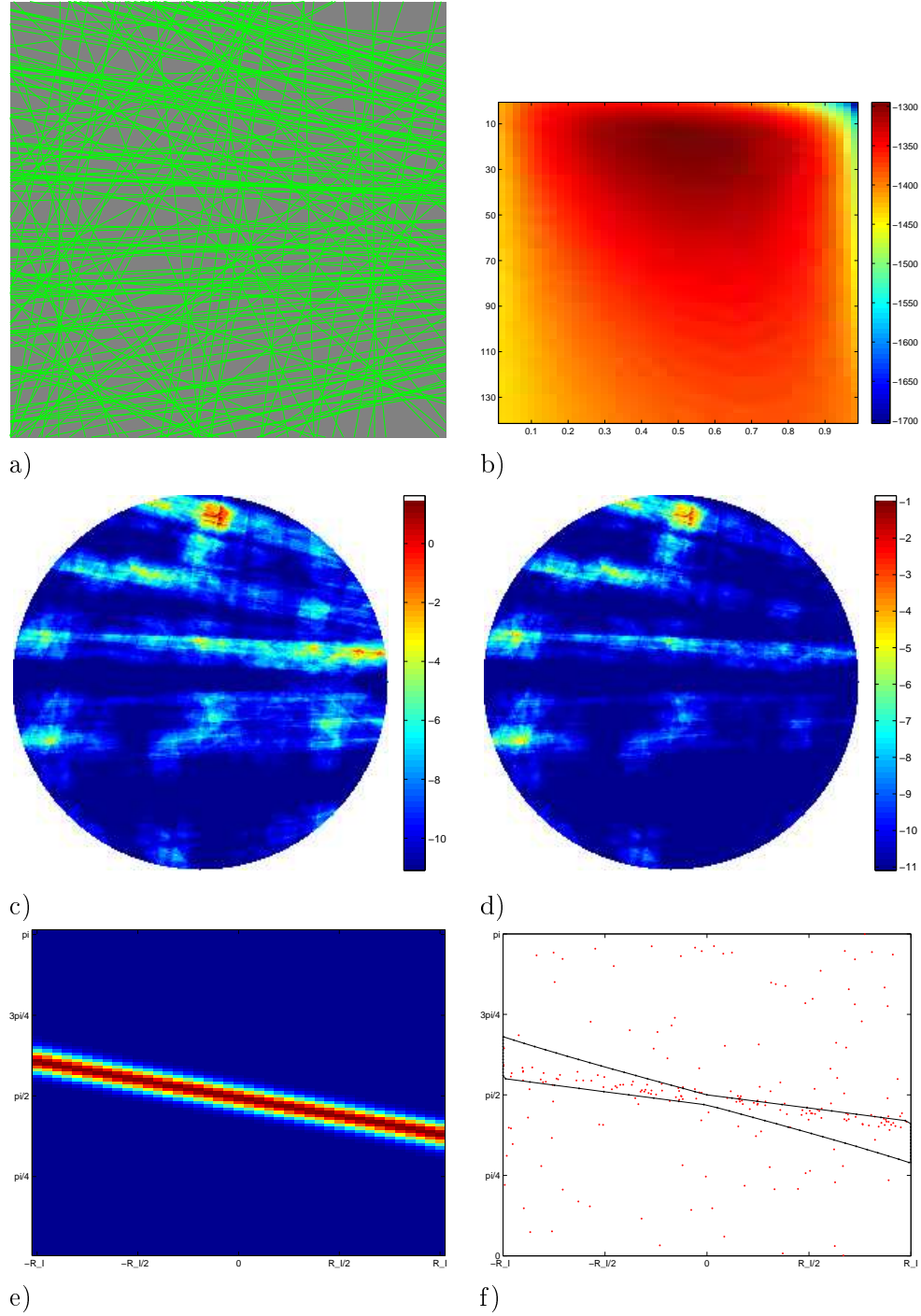
Les exemples synthétiques sont construits à partir de droites indépendantes et identiquement distribuées selon une loi connue que l'on a simulée. La première loi utilisée (Figure 3.17) est celle de densité $f_{p, \sigma}$ pour différentes valeurs de p et de σ . Le but de ces tests est de valider la procédure : la convergence principale doit être détectée comme la région la plus significative contre le modèle uniforme et les valeurs sélectionnées pour p et σ par maximisation de la log-vraisemblance doivent être proches des valeurs réelles utilisées lors de la simulation. De plus sous le modèle estimé, il ne doit pas y avoir d'événements significatifs (ou moins de ε événements ε -significatifs).

Sur la Figure 3.17 les droites ont été simulées suivant un modèle de mélange. La convergence principale a été placée à l'extérieur de l'image, en (500, 14). Même si le mélange estimé par notre procédure n'est pas exactement celui utilisé lors de la simulation, il est suffisamment proche du modèle réel pour ne pas donner d'événements significatifs lors du second test a contrario.

Sur l'exemple 3.18 deux convergences ont été simulées, l'une est plus forte que l'autre qui est masquée sous le modèle uniforme. Quand on prend pour modèle a contrario le modèle de mélange estimé par la procédure la convergence secondaire est rehaussée : c'est la plus significative et la convergence principale est effacée, elle n'est plus détectée.

3.5.2 Expériences sur des mammographies

La procédure a été testée sur des mammographies et sur des images extraites de mammographies afin qu'elles ne contiennent que du tissu glandulaire. Ce sont surtout les convergences locales (étudiées au Chapitre 4) qui sont pertinentes, les convergences globales n'ont pas vraiment de sens sur ce type d'image, à part la



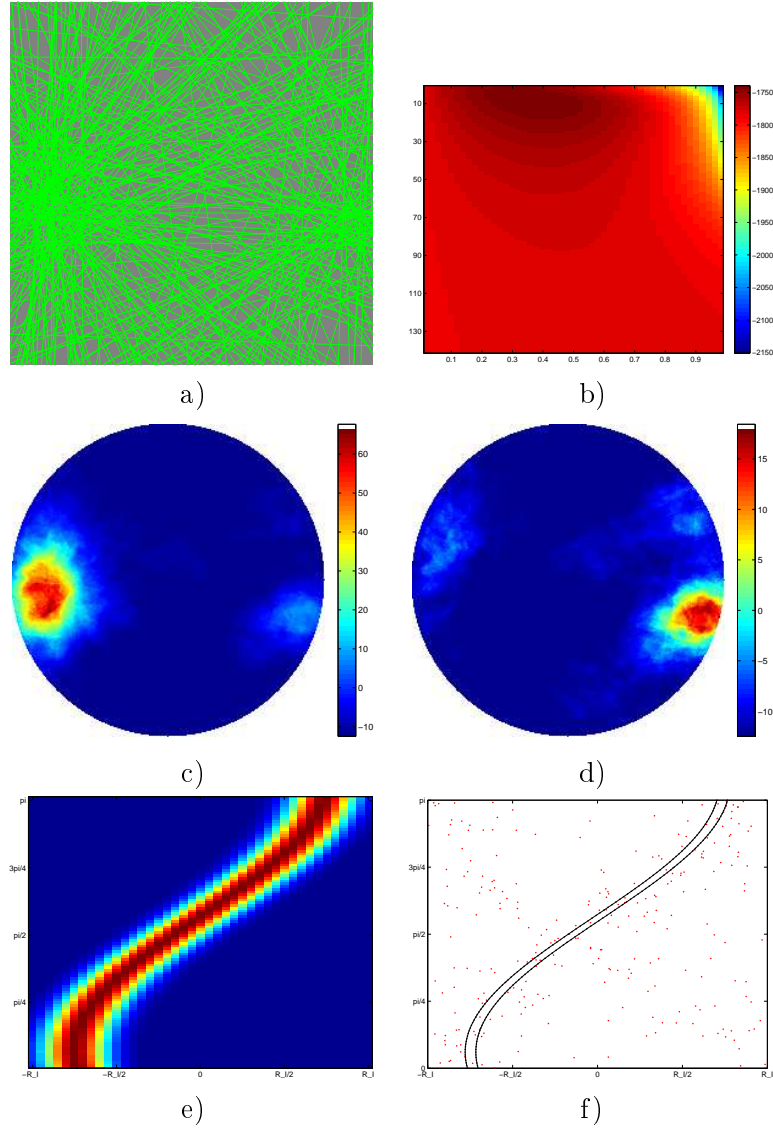


FIGURE 3.18 – a) On a simulé $N = 300$ droites selon un modèle paramétrique avec deux termes gaussiens et un terme uniforme : la convergence principale est centrée en $(x_M, y_M) = (-100, 14)$ avec $\sigma = 20$ et a un poids $p = 0.4$, la convergence secondaire est centrée en $(x_M, y_M) = (114, 28)$, de poids $p = 0.2$ et $\sigma = 10$. b) La log-vraisemblance est maximale pour $(\hat{p}, \hat{\sigma}) = (0.37, 17)$. c) La convergence principale est détectée en tant que région la plus significative tandis que la convergence secondaire n'est pas détectée contre le modèle uniforme. d) Sous le modèle $f_{\hat{p}, \hat{\sigma}}$ la convergence secondaire est la région la plus significative et la convergence principale n'est plus significative. e) la densité estimée $f_{\hat{p}, \hat{\sigma}}$. f) la région la plus significative contre le modèle uniforme.

convergence normale vers le téton, qui est utile pour estimer un modèle anisotrope. Contre le modèle uniforme on trouve des régions de convergences significatives. La procédure donne deux résultats différents sur les deux exemples suivants.

Dans l'exemple 3.19 il y a une convergence fortement significative autour du téton contre le modèle uniforme, qui s'explique par l'orientation privilégiée des spicules vers ce point. Cette convergence étant la plus significative, elle est intégrée au modèle et n'est plus détectée lors du second test a contrario. Cependant une nouvelle convergence est détectée, elle a été relevée quand le modèle a contrario a été modifié pour mieux tenir compte de la répartition normale des spicules.

Dans l'exemple 3.20 le point de convergence estimé est aussi autour du téton. On observe de nouveau que la convergence normale des spicules dans le sein a été détectée significative. Cependant une fois que le modèle de mélange est estimé et que l'on cherche les événements significatifs contre ce modèle, on voit les limites de la procédure. En effet, il y a toujours des convergences significatives autour du téton, même après avoir ajouté un terme de convergence au mélange. Cela est vrai tant à l'intérieur de l'image qu'à l'extérieur. On peut l'expliquer par le fait que la forme de la loi a contrario n'est pas adaptée pour cet exemple. La convergence normale des spicules n'est pas assez localisée et la forme paramétrique que l'on impose au modèle est trop contraignante pour pouvoir approcher la distribution empirique des droites de cette image.

3.5.3 Expériences sur des images naturelles

La procédure a également été testée sur des images naturelles (*ie* des scènes de la vie quotidienne). Sur certains exemples il y a effectivement une convergence principale, sur d'autres les modèles de type (3.38) sont moins adaptés.

Dans l'exemple 3.21 il y a une zone de convergence claire au centre de la fleur, visible sur l'image des droites support. Elle est effectivement détectée comme la région la plus significative contre le modèle uniforme et son centre est utilisé comme point de convergence principale dans l'estimation du modèle (3.38). Contre le modèle estimé il n'y a plus d'événements significatifs, c'est le signe que ce modèle décrit assez bien la répartition des droites de cette image.

Dans l'exemple de la figure 3.22 il y a trois directions principales de fuite comme souvent dans les images de perspective. On voit d'ailleurs trois faisceaux de droites parallèles sur la seconde image. Le centre de l'image est significatif parce qu'il se situe à l'intersection des trois faisceaux de droites parallèles.

La Figure 3.23 montre la présence d'un point de fuite extérieur à l'image, comme on le voit sur l'image des droites support ou encore sur l'image de $-\log \text{NFA}_1$ pour les régions extérieures. Comme souvent dans ce genre de configuration on obtient des régions significatives diamétralement opposées. L'algorithme sélectionne le centre de la plus significative comme point de convergence et contre le nouveau modèle de bruit il n'y a plus qu'une seule région extérieure significative.

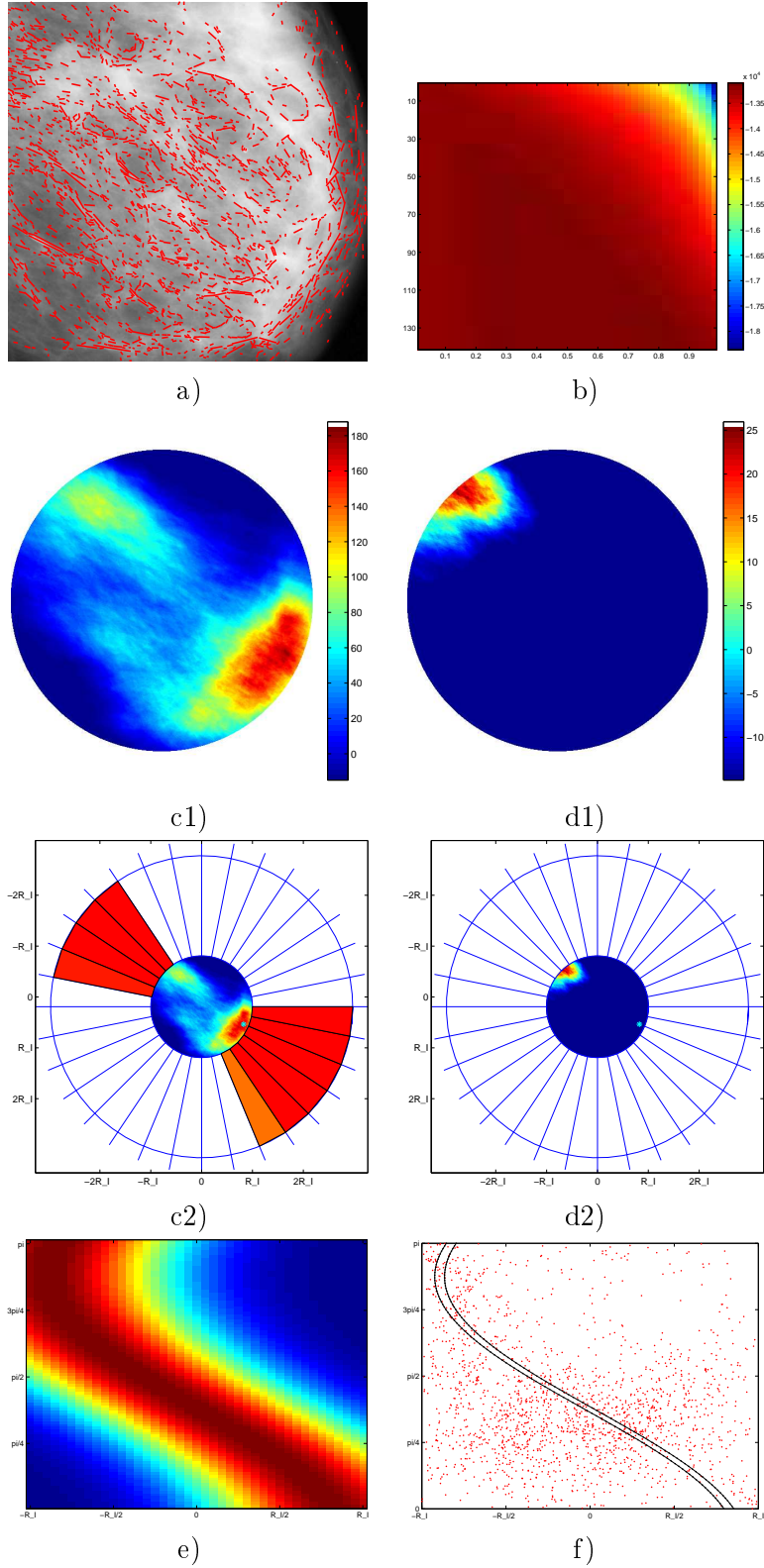


FIGURE 3.19 – a) Image de rayon $R_I = 274$. Il y a $N = 1781$ segments détectés par le LSD. b) Les paramètres estimés sont $(\hat{p}, \hat{\sigma}) = (0.62, 145)$. c) Le point le plus significatif est $(x_M, y_M) = (226, 94)$. d) Le test a contrario contre le modèle anisotrope donne une nouvelle convergence et aucune région extérieure n'est significative. e) La densité estimée sur (ρ, φ) . f) La région la plus significative contre le modèle uniforme.

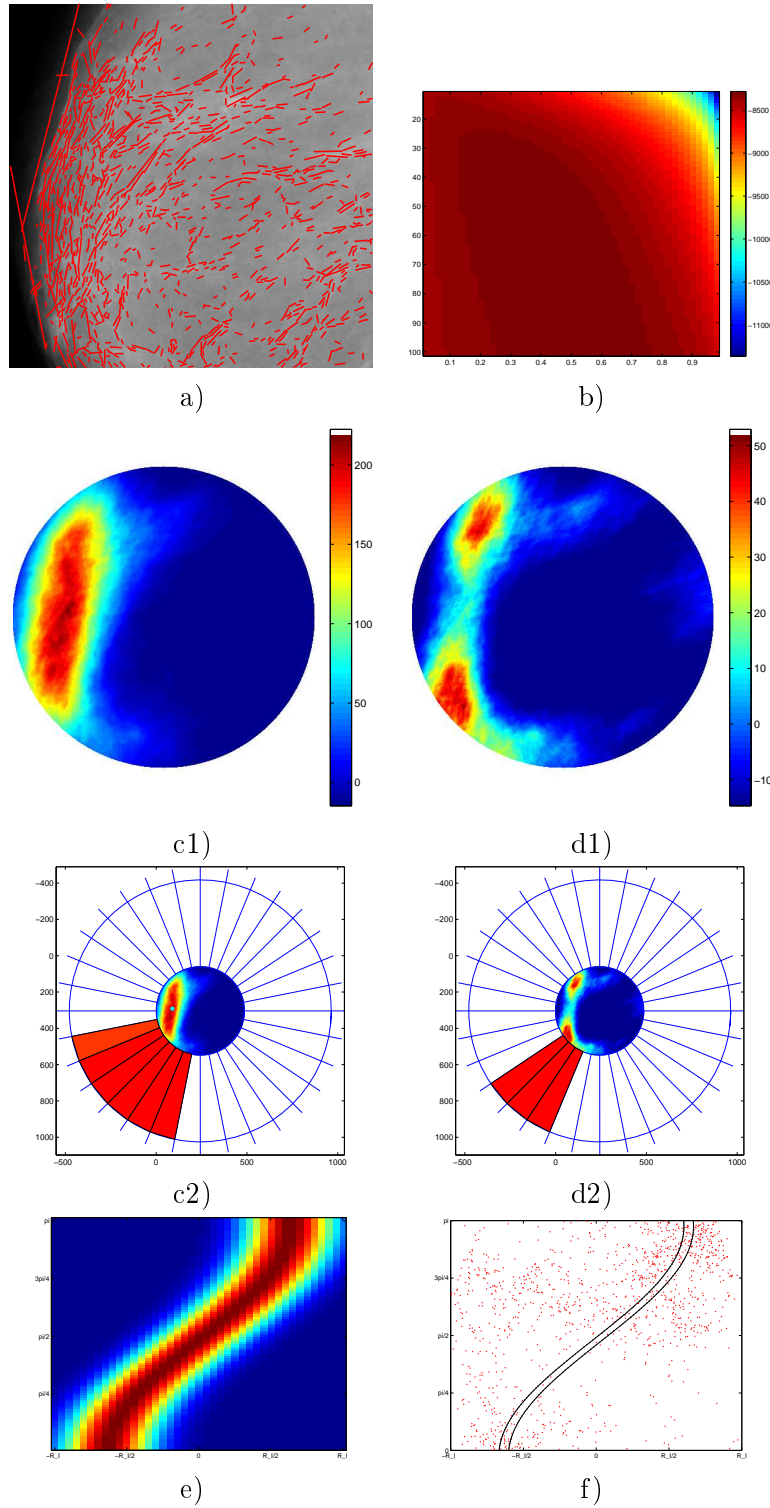


FIGURE 3.20 – a) Le rayon de l'image est $R_I = 243$. Il y a $N = 1147$ segments détectés par le LSD. b) Les estimations des paramètres sont $(\hat{p}, \hat{\sigma}) = (0.38, 53)$. c) Le point le plus significatif contre le modèle uniforme est $(x_M, y_M) = (-154, -12)$. d) Il y a moins de détections contre le nouveau modèle a contrario, et la convergence principale a été éliminée. e) La densité estimée. f) $(\rho_n, \varphi_n)_n \in [-R_I, R_I] \times [0, \pi[$.

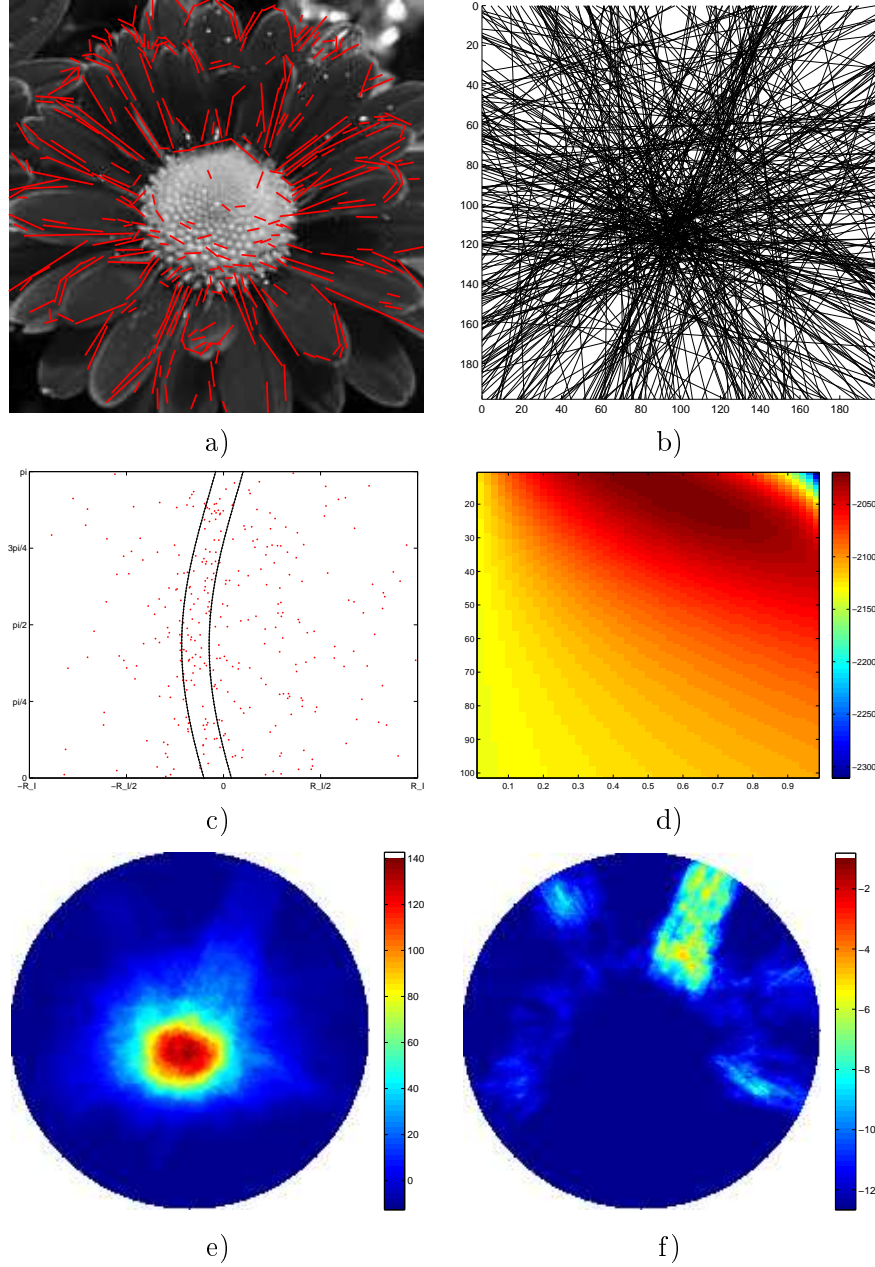


FIGURE 3.21 – a) Une image dans laquelle $N = 332$ segments ont été détectés. Le rayon de l'image est $R_I = 99$. b) L'ensemble des droites support. c) $(\rho_n, \varphi_n)_n \in [-R_I, R_I] \times [0, \pi[$ d) La log-vraisemblance est maximale pour $(\hat{p}, \hat{\sigma}) = (0.53, 13)$. e) Contre le modèle uniforme le point le plus significatif est $(x_M, y_M) = (-3, 14)$. f) Il n'y a plus de détections contre le nouveau modèle de bruit.

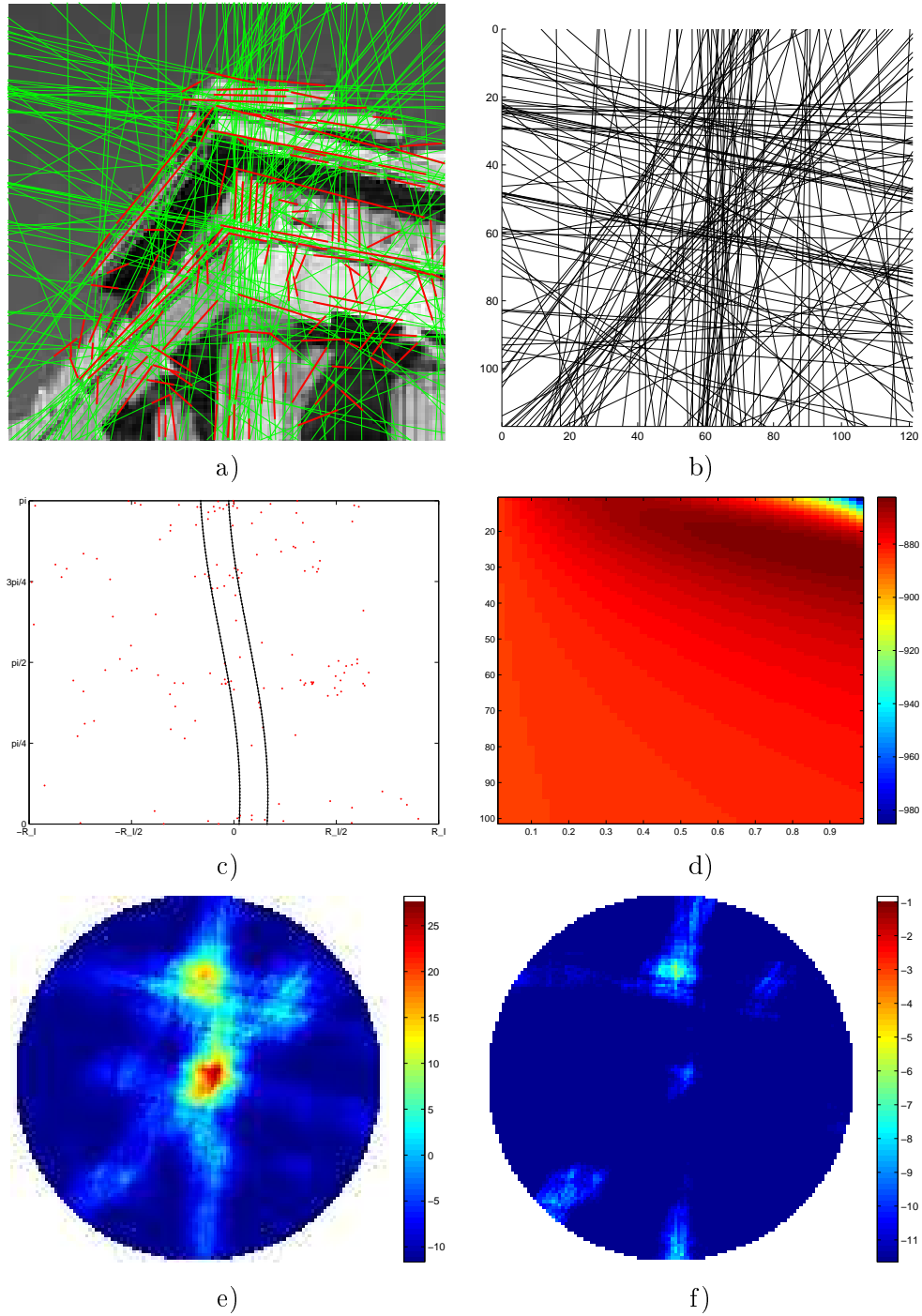


FIGURE 3.22 – a) Un exemple d'image naturelle : le rayon de l'image est $R_I = 58$ et $N = 150$ segments ont été détectés. b) Ensemble des droites support, c) La région la plus significative vue dans l'espace des coordonnées polaires (ρ, φ) des droites qui l'intersectent et le nuage de points représentant les droites (ρ_n, φ_n) de l'image. d) La log-vraisemblance est maximale pour $(\hat{\rho}, \hat{\sigma}) = (0.89, 25)$. e) Il y a une convergence principale fortement significative contre le modèle uniforme. $-\log \text{NFA}_1$ est maximal au point $(x_M, y_M) = (5.5, -1.5)$. f) Contre le modèle paramétrique estimé il n'y a plus d'événements significatifs.

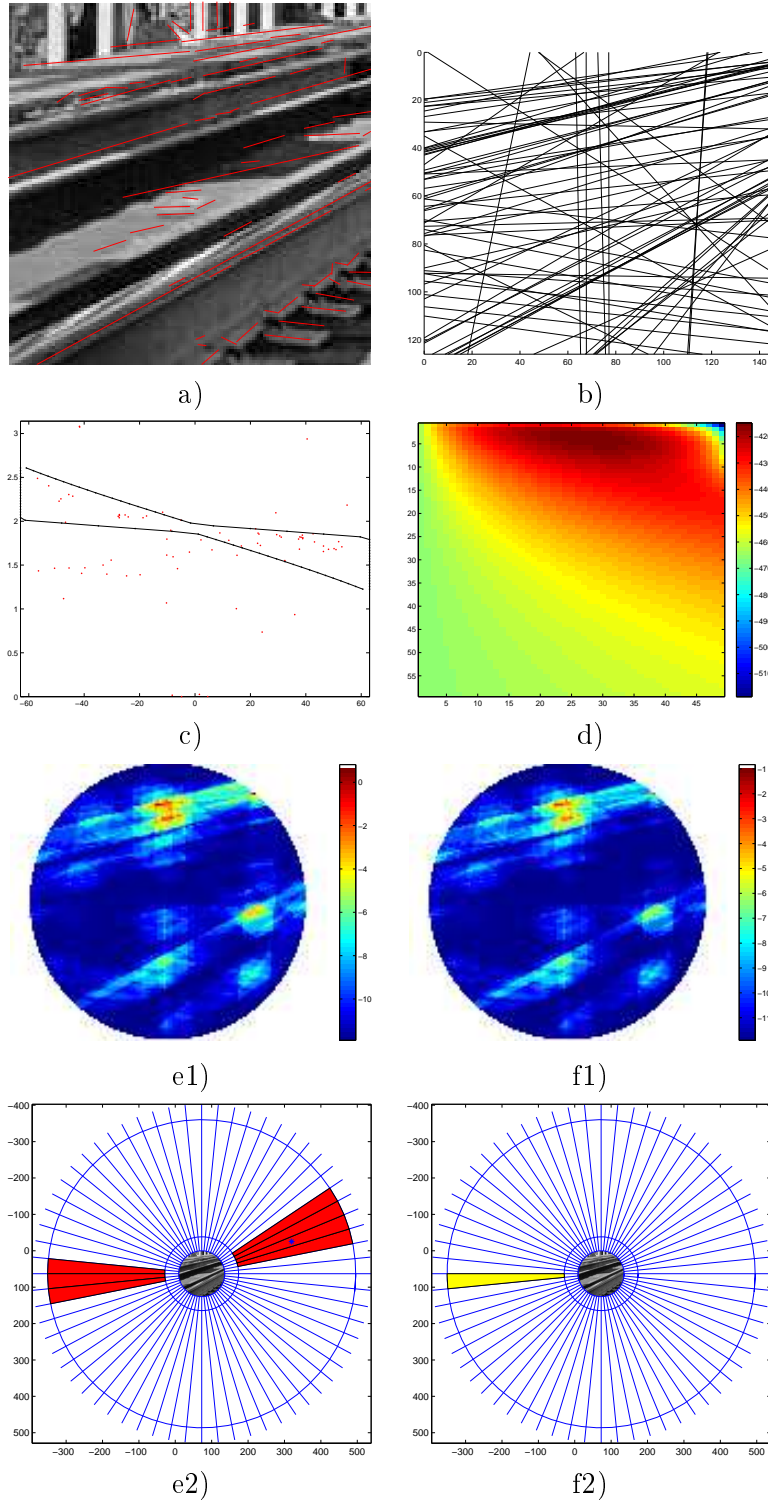


FIGURE 3.23 – a) Un exemple d'image naturelle : le rayon de l'image est $R_I = 63$ et $N = 78$ segments ont été détectés. b) Ensemble des droites support. c) La région la plus significative vue dans l'espace des coordonnées polaires (ρ, φ) des droites qui l'intersectent et le nuage de points représentant les droites (ρ_n, φ_n) de l'image. d) La log-vraisemblance est maximale pour $(\hat{\rho}, \hat{\sigma}) = (0.55, 25)$. e) Il y a une convergence principale fortement significative contre le modèle uniforme. $-\log \text{NFA}_1$ est maximal au point $(x_M, y_M) = (247, -88)$. f) Contre le modèle paramétrique estimé il subsiste une convergence significative extérieure.

Détection de convergences locales

Sommaire

4.1	Passage des droites aux segments	60
4.1.1	Paramétrisation des segments	60
4.1.2	Comparaison modèle uniforme sur les droites, modèle uniforme sur les segments	62
4.2	Détection a contrario de convergences de segments	64
4.2.1	Modélisation des convergences	64
4.2.2	Expression du nombre de fausses alarmes	64
4.2.3	Majoration de l'espérance du nombre d'événements significatifs	66
4.2.4	Comparaison des nombres de fausses alarmes avec ou sans contexte	70
4.2.5	Modèles a contrario	72
4.2.5.1	Loi gaussienne sur l'orientation	72
4.2.5.2	Positions déterministes, positions uniformes	77
4.2.5.3	Modèle de mélange sur les segments	79
4.2.5.4	Probabilité de converger vers le centre d'une couronne	79
4.2.6	Calcul théorique et numérique du nombre de fausses alarmes	81
4.2.6.1	Loi binomiale, équivalent grandes déviations, inégalité de Hoeffding	82
4.2.6.2	Loi Poisson binomiale, inégalité de Hoeffding	82
4.3	Expériences	83
4.3.1	Exemples synthétiques	83
4.3.2	Estimation d'un modèle de mélange	90
4.3.3	Expériences sur des mammographies	91
4.3.4	Expériences sur des images naturelles	95

Ce chapitre traite de la détection des convergences locales dans les images. Elles peuvent être par exemple les lésions stellaires dans les mammographies, mais les images naturelles peuvent en contenir elles aussi. La méthode a contrario est analogue à celle utilisée lors de la détection de convergences globales des droites, mais les calculs diffèrent sensiblement. En effet les structures élémentaires que l'on considère dans ce chapitre sont les segments détectés dans l'image et non plus leurs droites support. Dans un premier temps on étudie les liens entre les modèles aléatoires sur les droites et les modèles aléatoires sur les segments notamment entre les modèles uniformes. Le principe de la méthode de détection des convergences locales a contrario est détaillé, plusieurs expressions du nombre de fausses alarmes sont données,

plusieurs modèles a contrario sont définis. Partant du modèle uniforme, on a cherché à définir un modèle aléatoire sur les segments qui tienne compte d'une orientation globale de ceux-ci. Enfin nous abordons le problème de l'estimation de modèles de mélange sur les images pour les utiliser comme modèles a contrario.

4.1 Passage des droites aux segments

4.1.1 Paramétrisation des segments

La paramétrisation que nous avons choisie sur les segments est la suivante : (s_1, s_2) sont les coordonnées cartésiennes du centre du segment et θ ($\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est l'angle entre le segment et l'axe horizontal) est leur orientation (Figure 4.1). La longueur des segments n'est donc pas prise en compte. Par la suite on sera amené à choisir une mesure de probabilité sur les triplets (s_1, s_2, θ) . Comme nous l'avons fait pour les droites nous étudierons un modèle uniforme, un modèle tenant compte d'une convergence globale et les modèles de mélange de ces deux termes. Il est donc judicieux d'établir un lien entre les modèles aléatoires sur les segments et ceux qui en résultent sur leurs droites support. Les coordonnées du segment (s_1, s_2, θ) peuvent se convertir en un autre système de coordonnées (ρ, φ, t) où (ρ, φ) sont les coordonnées polaires de la droite support et où t est un paramètre de position du segment sur sa droite support (l'origine sur la droite étant prise en le projeté orthogonal de O sur (ρ, φ)), orientée par le vecteur $\vec{v}_\varphi(\sin \varphi, \cos \varphi)$.

Le changement de variables s'écrit :

$$\begin{cases} s_1 &= \rho \cos \varphi + t \sin \varphi \\ s_2 &= -\rho \sin \varphi + t \cos \varphi \\ \theta &= \varphi - \frac{\pi}{2}. \end{cases}$$

La matrice jacobienne de ce changement de variables s'écrit

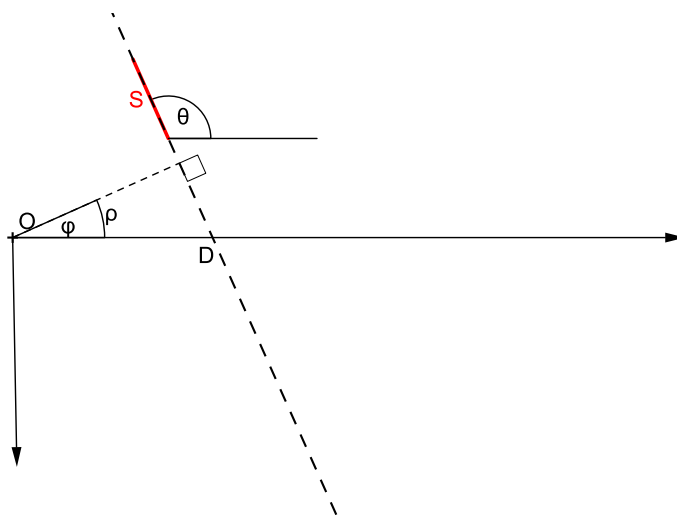
$$J(\rho, \varphi, t) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\rho \sin \varphi + t \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & -\rho \cos \varphi - t \sin \varphi & \cos \varphi \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le déterminant de $J(\rho, \varphi, t)$ vaut 1. Par conséquent la densité f du 3-uplet (ρ, φ, t) se déduit de la densité \tilde{f} sur le 3-uplet (s_1, s_2, θ) :

$$\begin{aligned} f(\rho, \varphi, t) &= \tilde{f}(s_1(\rho, \varphi, t), s_2(\rho, \varphi, t), \theta(\rho, \varphi, t)) \\ &= \tilde{f}(\rho \cos \varphi + t \sin \varphi, -\rho \sin \varphi + t \cos \varphi, \varphi - \frac{\pi}{2}). \end{aligned}$$

Le changement de variables réciproque s'écrit :

$$\begin{cases} \rho &= -s_1 \sin \theta - s_2 \cos \theta \\ \varphi &= \theta + \frac{\pi}{2} \\ t &= s_1 \cos \theta - s_2 \sin \theta. \end{cases}$$

FIGURE 4.1 – Paramétrisation d'un segment S sur sa droite support D .

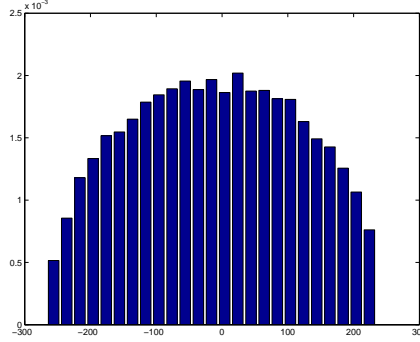


FIGURE 4.2 – L’histogramme de la variable ρ calculé sur un échantillon de $N = 30000$ segments uniformément distribués dans un domaine défini par un disque de rayon 256. On voit que la loi induite sur ρ n’est pas la loi uniforme.

4.1.2 Comparaison modèle uniforme sur les droites, modèle uniforme sur les segments

Le modèle uniforme sur les segments dans l’image n’induit pas une répartition uniforme des droites support. En effet si $\tilde{f}(s_1, s_2, \theta) = \frac{1}{\pi R_I^2} \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_{\{s_1^2 + s_2^2 \leq R_I^2\}} \times \mathbb{1}_{\{\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]\}}$ est la densité de probabilité de (s_1, s_2, θ) , alors la loi sur le 3-uplet (ρ, φ, t) est :

$$f(\rho, \varphi, t) = \frac{1}{\pi R_I^2} \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_{\{\rho^2 + t^2 \leq R_I^2\}} \times \mathbb{1}_{\{\varphi \in [0, \pi]\}}. \quad (4.1)$$

Cette loi n’est pas uniforme sur ρ comme le montre l’intégration sur t :

$$\begin{aligned} f(\rho, \varphi) &= \frac{1}{\pi R_I^2} \frac{1}{\pi} \int_t \mathbb{1}_{\{\rho^2 + t^2 \leq R_I^2\}} \times \mathbb{1}_{\{\varphi \in [0, \pi]\}} dt \\ &= \frac{1}{\pi R_I^2} \frac{1}{\pi} \mathbb{1}_{\{\rho^2 \leq R_I^2\}} \mathbb{1}_{\{\varphi \in [0, \pi]\}} \int_t \mathbb{1}_{\{t^2 \leq R_I^2 - \rho^2\}} dt \\ &= \frac{2}{\pi R_I^2} \frac{1}{\pi} \sqrt{R_I^2 - \rho^2} \mathbb{1}_{\{\rho^2 \leq R_I^2\}} \mathbb{1}_{\{\varphi \in [0, \pi]\}}. \end{aligned}$$

On obtient par une intégration immédiate la loi marginale de ρ

$$f(\rho) = \frac{2}{\pi R_I^2} \sqrt{R_I^2 - \rho^2} \mathbb{1}_{\{\rho^2 \leq R_I^2\}}. \quad (4.2)$$

La Figure 4.2 montre l’histogramme empirique d’un échantillon de la variable ρ obtenu par simulation de $N = 30000$ segments uniformément dans le disque, on reconnait la loi donnée par l’équation précédente.

Pour illustrer le fait que le modèle uniforme sur les segments n’induit pas une répartition uniforme sur les droites, la détection a contrario par rapport à la densité uniforme sur les droites a été exécutée sur l’ensemble des droites support de segments répartis uniformément dans l’image comme expliqué au Chapitre 3. On observe Figure 4.3 que quelques points sont significatifs. Or si les droites étaient réparties

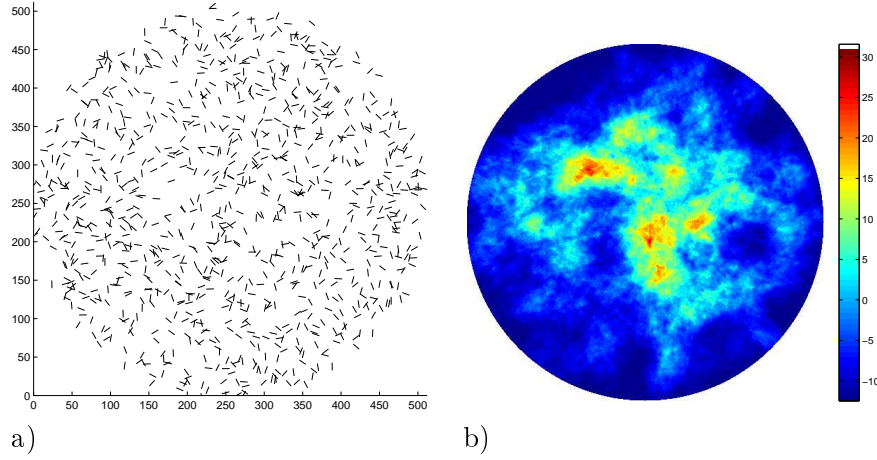


FIGURE 4.3 – a) 1000 segments distribués uniformément dans un domaine circulaire. b) image de $-\log \text{NFA}_1$, tout point tel que $-\log \text{NFA}_1 \geq 0$ est 1-significatif. Il y a des événements significatifs, surtout au centre de l'image car les petites valeurs de ρ sont plus fréquentes qu'elles ne devraient l'être si les droites étaient uniformément distribuées sur $] -R_I, R_I[\times [0, \pi[$.

uniformément, on aurait en moyenne moins de ε événements ε -significatifs. De plus ces événements significatifs se situent vers le centre de l'image car les petites valeurs de ρ sont sur-représentées par rapport à la loi uniforme.

On peut se poser la question de savoir, inversement, quelle densité sur les segments induirait une répartition uniforme de leurs droites support. La suite montre qu'une telle loi n'est pas unique.

Supposons que la loi des droites support soit la loi uniforme sur $[-R_I, R_I] \times [0, \pi]$. On suppose de plus que la loi sur le triplet (ρ, φ, t) est de la forme :

$$f(\rho, \varphi, t) = \frac{1}{2\pi R_I} \mathbb{1}_{\{|\rho| \leq R_I\}} \mathbb{1}_{\{\varphi \in [0, \pi]\}} h(t|\rho, \varphi),$$

où pour tout $\rho \in [-R_I, R_I]$ et pour tout $\varphi \in [0, \pi]$, la fonction $t \mapsto h(t|\rho, \varphi)$ est positive, continue par morceaux, d'intégrale 1 et nulle en dehors de $[-\sqrt{R_I^2 - \rho^2}, \sqrt{R_I^2 - \rho^2}]$.

Alors la loi sur le triplet (s_1, s_2, θ) se déduit

$$\begin{aligned} \tilde{f}(s_1, s_2, \theta) &= f(-s_1 \sin \theta - s_2 \cos \theta, \theta + \pi/2, s_1 \cos \theta - s_2 \sin \theta) \\ &= \frac{1}{2\pi R_I} \mathbb{1}_{\{|s_1 \sin \theta + s_2 \cos \theta| \leq R_I\}} \mathbb{1}_{\{\theta + \pi/2 \in [0, \pi]\}} \\ &\quad h(s_1 \cos \theta - s_2 \sin \theta - s_1 \sin \theta - s_2 \sin \theta, \theta + \pi/2) \\ &= \frac{1}{2\pi R_I} \mathbb{1}_{\{|s_1 \sin \theta + s_2 \cos \theta| \leq R_I\}} \mathbb{1}_{\{\theta \in [-\pi/2, \pi/2]\}} \mathbb{1}_{\{(s_1 \cos \theta - s_2 \sin \theta)^2 \leq R_I^2 - (s_1 \sin \theta + s_2 \cos \theta)^2\}} \\ &\quad h(s_1 \cos \theta - s_2 \sin \theta - s_1 \sin \theta - s_2 \sin \theta, \theta + \pi/2) \\ &= \frac{1}{2\pi R_I} \mathbb{1}_{\{s_1^2 + s_2^2 \leq R_I^2\}} \mathbb{1}_{\{\theta \in [-\pi/2, \pi/2]\}} h(s_1 \cos \theta - s_2 \sin \theta - s_1 \sin \theta - s_2 \sin \theta, \theta + \pi/2). \end{aligned}$$

Pour obtenir la dernière expression, on a utilisé le fait que le support de la fonction h est $[-\sqrt{R_I^2 - \rho^2}, \sqrt{R_I^2 - \rho^2}]$, donc que $\rho^2 + t^2 \leq R_I^2$.

Inversement il est clair que les lois sur (s_1, s_2, θ) de cette forme induisent sur le couple (ρ, φ) la loi uniforme.

4.2 Détection a contrario de convergences de segments

4.2.1 Modélisation des convergences

Nous avons modélisé les convergences locales par des couronnes $\mathcal{C}(\mathbf{x}, r, \alpha)$ centrées en \mathbf{x} , de rayon intérieur r et telles que le rayon extérieur soit égal à αr où $\alpha \geq 1$.

Les paramètres r et α sont destinés à varier, de sorte que notre méthodologie ne dépende pas des valeurs choisies. Les convergences locales dans les images sont modélisées par les couronnes qui contiennent suffisamment de segments convergeant vers leur centre. La méthode a contrario précise le seuil à partir duquel on considère qu'une couronne est une convergence locale. Ce seuil dépend essentiellement du modèle de bruit choisi. On va calculer un nombre de fausses alarmes sur les couronnes à partir du nombre de segments convergeant vers leur centre et chercher les événements significatifs sous le modèle de bruit.

4.2.2 Expression du nombre de fausses alarmes

Plusieurs expressions du nombre de fausses alarmes ont été testées et leurs résultats ont été comparés. À chaque couronne $\mathcal{C}(\mathbf{x}, r, \alpha)$ on attribue les deux nombres $N(\mathbf{x}, r, \alpha)$ et $K(\mathbf{x}, r, \alpha)$ qui sont respectivement le nombre de segments présents dans la couronne, et le nombre de segments de la couronne qui convergent vers le centre.

On considère qu'un segment appartient à une couronne si son milieu est dans la couronne et on considère qu'il converge vers le centre si sa droite support intersecte le centre de la couronne (Figure 4.4).

Intuitivement, plus une couronne contient de segments qui pointent vers son centre, plus elle doit être significative. Le nombre de fausses alarmes doit donc sélectionner les couronnes pour lesquelles la valeur de $K(\mathbf{x}, r, \alpha)$ est anormalement élevée sous le modèle de bruit. C'est pourquoi les nombres de fausses alarmes testés sont de la forme $\mathbb{P}(K \geq K(\mathbf{x}, r, \alpha))$.

Cependant on peut, comme le proposent Grosjean et Moisan [22], choisir d'inclure ou non l'information de contexte $N = N(\mathbf{x}, r, \alpha)$ dans l'expression du nombre de fausses alarmes, ce qui donne deux définitions possibles du nombre de fausses alarmes :

$$\text{NFA}(\mathbf{x}, r, \alpha) = N_T \mathbb{P}(K \geq K(\mathbf{x}, r, \alpha)) \quad (4.3)$$

$$\text{NFA}(\mathbf{x}, r, \alpha) = N_T \mathbb{P}(K \geq K(\mathbf{x}, r, \alpha) | N = N(\mathbf{x}, r, \alpha)). \quad (4.4)$$

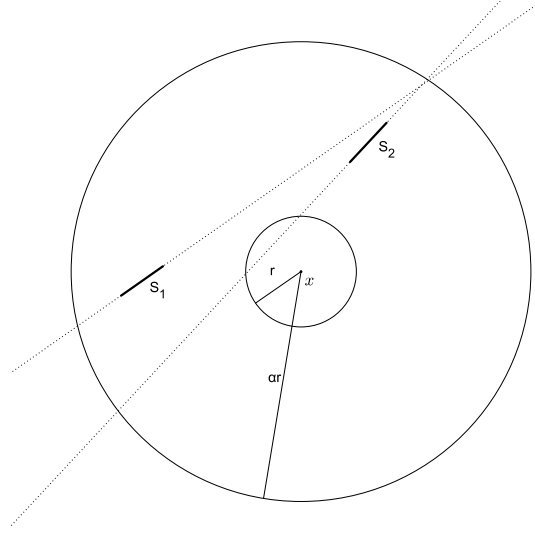


FIGURE 4.4 – Modélisation des convergences locales par des couronnes de rayon intérieur r , de rayon extérieur αr avec $\alpha > 1$. Sur cet exemple, S_1 ne converge pas vers le centre $B(\mathbf{x}, r)$, contrairement à S_2 donc $N(\mathbf{x}, r, \alpha) = 2$ et $K(\mathbf{x}, r, \alpha) = 1$.

Comme il est démontré dans la suite ces choix donnent deux quantités qui respectent la propriété de majoration du nombre d'événements significatifs sous le modèle de bruit : dans une image suivant le modèle de bruit il doit y avoir moins de ε événements ε -significatifs en moyenne. Ces deux choix conduisent à des détections a priori différentes mais ils sont tous les deux sensibles aux couronnes pour lesquelles un grand nombre (devant celui attendu sous le modèle a contrario) de segments convergent vers leur centre.

On pourrait aussi vouloir détecter les couronnes qui contiennent un grand nombre de segments $N(\mathbf{x}, r, \alpha)$ et un grand nombre de segments qui convergent vers leur centre $K(\mathbf{x}, r, \alpha)$. Pour cela il faudrait définir le nombre de fausses alarmes par

$$\text{NFA}(\mathbf{x}, r, \alpha) = N_T \mathbb{P}(K \geq K(\mathbf{x}, r, \alpha), N \geq N(\mathbf{x}, r, \alpha)).$$

Le tableau 4.1 résume les différentes possibilités pour la définition d'un nombre de fausses alarmes sur les couronnes.

Fonction de mesure	Forme du nombre de fausses alarmes
K nombre de segments qui convergent vers le centre de la couronne $\mathcal{C}(\mathbf{x}, r, \alpha)$	$N_T \mathbb{P}(K \geq k)$
K , avec contexte $N = n$	$N_T \mathbb{P}(K \geq k N = n)$
K, N nombre de segments dans $\mathcal{C}(\mathbf{x}, r, \alpha)$	$N_T \mathbb{P}(K \geq k, N \geq n)$

TABLE 4.1 – Trois possibilités différentes pour définir le nombre de fausses alarmes d’une couronne pour la détection de convergences locales.

Cependant seules les deux premières propositions sont des nombres de fausses alarmes vérifiant la propriété de majoration du nombre d’événements significatifs dans une image suivant le modèle de bruit.

4.2.3 Majoration de l’espérance du nombre d’événements significatifs

Théorème 4.2.1 ([22]). *Les deux expressions $N_T \mathbb{P}(K \geq k)$ et $N_T \mathbb{P}(K \geq k | N = n)$ vérifient la propriété des nombres de fausses alarmes : dans une image où les segments sont distribués selon le modèle a contrario, le nombre d’événements ε -significatifs S_ε est en moyenne inférieur à ε .*

$$\mathbb{E}(S_\varepsilon) \leq \varepsilon. \quad (4.5)$$

Lemme 4.2.1 ([22]). *Si X est une variable aléatoire, en posant $F(t) = \mathbb{P}(X \geq t)$, alors*

$$\forall s \in [0, 1], \mathbb{P}(F(X) \leq s) \leq s. \quad (4.6)$$

Le lemme 4.2.2 est la version conditionnelle du lemme 4.2.1, sa démonstration s’appuie aussi sur celle du lemme 4.2.1.

Lemme 4.2.2 ([22]). *Soient K et N deux variables aléatoires réelles. La fonction $F(t, u) = \mathbb{P}(K \geq t | N = u)$ est bien définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{N}$. Alors on a*

$$\forall s \in [0, 1], \mathbb{P}(F(K, N) \leq s) \leq s. \quad (4.7)$$

Preuve du théorème. Soit S_ε le nombre de couronnes significatives dans une image où les segments sont distribués selon le modèle de bruit.

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}S_\varepsilon &= \mathbb{E} \left(\sum_C \mathbf{1}_{\text{NFA}(C) \leq \varepsilon} \right) \\
&= \sum_C \mathbb{E}(\mathbf{1}_{\text{NFA}(C) \leq \varepsilon}) \\
&= \sum_C \mathbb{P}(\text{NFA}(C) \leq \varepsilon).
\end{aligned}$$

Premier cas : Le nombre de fausses alarmes est :

$$\text{NFA}(C) = N_T \mathbb{P}(K \geq K(C)).$$

Alors

$$\text{NFA}(C) \leq \varepsilon \Leftrightarrow \mathbb{P}(K \geq K(C)) \leq \frac{\varepsilon}{N_T}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(\text{NFA}(C) \leq \varepsilon) = \mathbb{P}\left(\mathbb{P}(K \geq K(C)) \leq \frac{\varepsilon}{N_T}\right).$$

D'après le lemme 4.2.1 on a

$$\mathbb{P}\left(\mathbb{P}(K \geq K(C)) \leq \frac{\varepsilon}{N_T}\right) \leq \frac{\varepsilon}{N_T}.$$

Donc $\mathbb{E}S_\varepsilon \leq \sum_C \frac{\varepsilon}{N_T}$. D'où finalement :

$$\mathbb{E}S_\varepsilon \leq \epsilon.$$

Deuxième cas : Le nombre de fausses alarmes est :

$$\text{NFA}(C) = N_T \mathbb{P}(K \geq K(C) | N = N(C)).$$

Alors

$$\text{NFA}(C) \leq \varepsilon \Leftrightarrow \mathbb{P}(K \geq K(C) | N = N(C)) \leq \frac{\varepsilon}{N_T}.$$

Donc

$$\mathbb{P}(\text{NFA}(C) \leq \varepsilon) = \mathbb{P}\left(\mathbb{P}(K \geq K(C) | N = N(C)) \leq \frac{\varepsilon}{N_T}\right).$$

D'après le lemme 4.2.2 on a

$$\mathbb{P}\left(\mathbb{P}(K \geq K(C) | N = N(C)) \leq \frac{\varepsilon}{N_T}\right) \leq \frac{\varepsilon}{N_T}.$$

Donc $\mathbb{E}S_\varepsilon \leq \sum_C \frac{\varepsilon}{N_T}$.

D'où finalement :

$$\mathbb{E}S_\varepsilon \leq \varepsilon.$$

□

La troisième proposition de nombre de fausses alarmes ne vérifie pas cette "bonne propriété" : les événements ε -significatifs avec ce nombre de fausses alarmes ne sont pas ceux dont le nombre d'occurrences sous le modèle de bruit est inférieur à ε . La figure 4.5 illustre ce fait. On a tiré des échantillons $N \sim \mathcal{B}(N_S, p)$ et $K|N \sim \mathcal{B}(N, p')$ pour évaluer les probabilités $\mathbb{P}(\mathbb{P}(K \geq k) \leq s)$ et $\mathbb{P}(\mathbb{P}(K \geq k, N \geq n) \leq s)$. La

variable N représente le nombre de segments d'une couronne, la variable K celui des segments qui convergent vers le centre d'une couronne. Sous le modèle uniforme N suit une loi binomiale dont le premier paramètre est le nombre total de segments dans l'image, et dont le deuxième paramètre est la probabilité de tomber dans la couronne lorsqu'on jette un point uniformément dans l'image.

Conditionnellement à N la variable K suit aussi une loi binomiale, dont le premier paramètre est N et dont le deuxième paramètre est la probabilité moyenne qu'un segment de la couronne converge vers le centre. Un résultat classique montre que la loi de K est la loi binomiale de paramètres N_S et pp' .

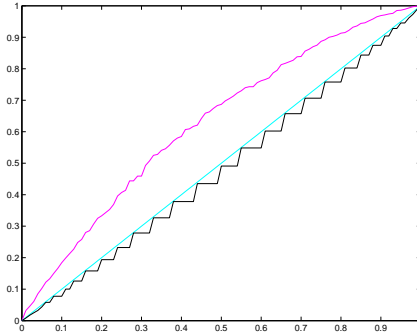


FIGURE 4.5 – Contre-exemple du théorème 4.2.1 pour la troisième proposition de nombre de fausses alarmes. Soient K et N deux variables non indépendantes. Par exemple si $N \sim \mathcal{B}(N_S, p)$ et $K|N \sim \mathcal{B}(N, p')$, alors la probabilité $\mathbb{P}(K \geq k, N \geq n)$ ne vérifie pas la propriété des nombres de fausses alarmes, à savoir $\mathbb{P}(\mathbb{P}(K \geq k, N \geq n) \leq s) \leq s$. La courbe rose $s \mapsto \mathbb{P}(\mathbb{P}(K \geq k, N \geq n) \leq s)$ est au-dessus de la courbe $s \mapsto s$. A l'inverse la propriété est vérifiée pour l'expression $\mathbb{P}(K \geq k)$: la courbe noire $s \mapsto \mathbb{P}(\mathbb{P}(K \geq k) \leq s)$ est en-dessous de la bissectrice.

Cependant on peut donner une autre majoration du nombre d'événements ε -significatifs avec le nombre de fausses alarmes $N_T \mathbb{P}(K \geq k, N \geq n)$. Dans le cas où les deux variables K et N sont indépendantes, la majoration du nombre d'événements ε -significatifs est donnée par la proposition suivante. La figure 4.6 illustre ce résultat.

Proposition 4.2.1. *Soient deux variables X_1 et X_2 indépendantes. On suppose que X_2 est une variable à densité. On note $F_i(t) = \mathbb{P}(X_i \geq t)$. Alors on a la majoration suivante*

$$\mathbb{P}(F_1(X_1)F_2(X_2) \leq \varepsilon) \leq \varepsilon(1 - \log \varepsilon) = h(\varepsilon), \quad (4.8)$$

pour tout $\varepsilon \in]0, 1]$. De plus si la variable X_1 est à densité c'est une égalité.

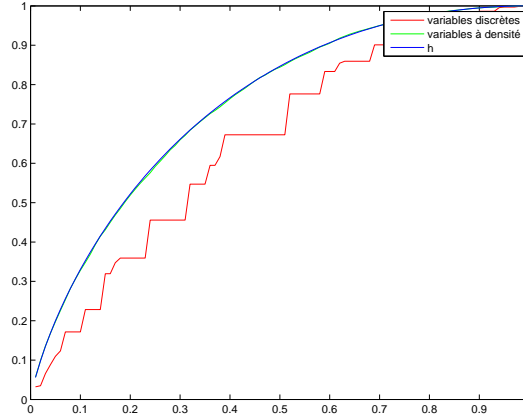


FIGURE 4.6 – La fonction majorante $h : \varepsilon \mapsto \varepsilon(1 - \log \varepsilon)$ en bleu. Les courbes vertes et rouges sont obtenues en simulant des échantillons X_1, X_2 de deux variables indépendantes de taille $N = 10000$ puis en évaluant la probabilité $\mathbb{P}(F_1(X_1)F_2(X_2) \leq \varepsilon)$ par $\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \mathbb{1}_{F_1(X_1^n)F_2(X_2^n) \leq \varepsilon}$. Courbe rouge : les variables X_i suivent la binomiale $\mathcal{B}(10, 0.5)$ et la fonction h est un majorant strict. Courbe verte : les variables X_i sont à densité uniforme sur $[0, 1]$, la courbe est presque confondue avec celle de h .

Démonstration. Supposons que X_2 est une variable à densité f_2 . Alors

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(F_1(X_1)F_2(X_2) \leq \varepsilon) &= \mathbb{E} \mathbb{E} \left(F_1(X_1) \leq \frac{\varepsilon}{F_2(X_2)} \mid X_2 \right) \\
 &= \int \mathbb{P}(F_1(X_1) \leq \frac{\varepsilon}{F_2(x)}) f_2(x) dx \\
 &\leq \int \min\left(\frac{\varepsilon}{F_2(x)}, 1\right) f_2(x) dx \\
 &\leq \int_{-\infty}^{F_2^{-1}(\varepsilon)} \frac{f_2(x)}{F_2(x)} dx + \int_{F_2^{-1}(\varepsilon)}^{+\infty} f_2(x) dx \\
 &\leq \varepsilon [-\log F_2(x)]_{-\infty}^{F_2^{-1}(\varepsilon)} + [-F_2(x)]_{F_2^{-1}(\varepsilon)}^{+\infty} \\
 &\leq \varepsilon(1 - \log(\varepsilon)).
 \end{aligned}$$

Si de plus X_1 est une variable à densité alors la première inégalité ci-dessus est une égalité et toutes les autres aussi. \square

La proposition précédente montre qu'avec le troisième nombre de fausses alarmes, dans le cas de deux variables K et N indépendantes (ce qui n'est pas le cas pour notre choix de variables), le nombre d'événements ε -significatifs dans une image où les segments suivent le modèle a contrario est inférieur à $\varepsilon(1 - \log \varepsilon)$. La majoration classique par ε n'est pas valable comme le montre la figure 4.6. Cependant la majoration donnée par la proposition donne un contrôle sur le nombre de fausses détections.

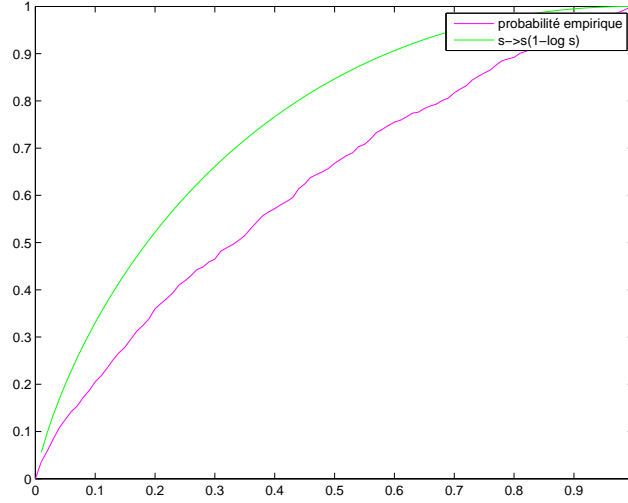


FIGURE 4.7 – Majoration de $\mathbb{P}(K \geq k, N \geq n)$ lorsque K et N ne sont pas indépendantes. La variable N a été simulée selon une binomiale de paramètres 1000 et 0.06, et K a été tirée conditionnellement à N selon une binomiale de paramètres N et 0.33.

Cependant les variables K et N ne sont pas indépendantes, donc la troisième proposition de nombre de fausses alarmes ne respecte pas les hypothèses de la proposition précédente. On peut vérifier cependant par des simulations que la conclusion est toujours valable (Figure 4.7). On a toujours la majoration par $s \mapsto s(1 - \log s)$, qui donne un contrôle, certes moins bon, du nombre de fausses détections si on utilisait le troisième nombre de fausses alarmes.

4.2.4 Comparaison des nombres de fausses alarmes avec ou sans contexte

Les deux premiers nombres de fausses alarmes proposés ne donnent pas a priori les mêmes détections. Il est donc intéressant de se demander si on peut hiérarchiser ces deux nombres de fausses alarmes, et si les événements significatifs de l'un le sont aussi pour l'autre.

On souhaite donc hiérarchiser les nombres de fausses alarmes suivants

$$N_T \mathbb{P}(K \geq k) \quad \text{et} \quad N_T \mathbb{P}(K \geq k | N = n). \quad (4.9)$$

Le premier n'inclut aucune information de contexte tandis que le deuxième suppose connu le nombre de segments dans la couronne. Pour une couronne $\mathcal{C}(\mathbf{x}, r, \alpha)$, on note toujours N la variable aléatoire donnant le nombre de segments qu'elle contient et K celle désignant le nombre de segments de la couronne qui convergent vers le centre de celle-ci. Dans le premier cas la variable K suit la loi binomiale $\mathcal{B}(N_S, p_1)$ où N_S est le nombre total de segments dans l'image et p_1 est la probabilité qu'un segment de l'image soit dans la couronne et converge vers le centre de celle-ci.

Dans le deuxième cas, conditionnellement à l'événement $N = n$, la variable $K \sim \mathcal{B}(n, p_2)$ où p_2 est la probabilité qu'un segment de la couronne converge vers le centre de celle-ci. On a alors la relation liant p_1 et p_2 : $p_1 = \frac{(\alpha^2-1)r^2}{R_I^2} p_2$.

De plus si les segments sont uniformément répartis dans l'image, et si leur nombre N_S est suffisamment grand, on peut considérer que $\frac{n}{N_S} \simeq \frac{(\alpha^2-1)r^2}{R_I^2}$.

Pour comparer les nombres de fausses alarmes il s'agit alors de comparer les queues des binomiales $\mathcal{B}(n, p_2)$ et $\mathcal{B}(N_S, \frac{n}{N_S} p_2)$. Or pour les calculer numériquement on utilise le théorème des grandes déviations, qui donne un équivalent lorsque le premier paramètre tend vers $+\infty$. Il faut donc comparer

$$\begin{aligned}
 -\log \mathbb{P}(K \geq k) &\approx N_S \left[\frac{k}{N_S} \log \frac{k}{np_2} + \left(1 - \frac{k}{N_S}\right) \log \frac{1 - \frac{k}{N_S}}{1 - \frac{np_2}{N_S}} \right] \\
 \text{et} \\
 -\log \mathbb{P}(K \geq k | N = n) &\approx n \left[\frac{k}{n} \log \frac{k}{np_2} + \left(1 - \frac{k}{n}\right) \log \frac{1 - \frac{k}{n}}{1 - p_2} \right],
 \end{aligned}$$

valables dès que $k \geq np_2 \simeq Np_1$.

Lemme 4.2.3. *La fonction $x \mapsto (x - k) \log \frac{x-k}{x-p}$ avec $k \geq p$ est décroissante sur $[k, +\infty[$.*

Démonstration. Lorsqu'on dérive par rapport à x on obtient la fonction $x \mapsto \log \frac{x-k}{x-p} + 1 - \frac{x-k}{x-p}$. Le lemme découle de l'inégalité classique $\log(1+u) \leq u, \forall u \in]-1, +\infty[$. \square

En conséquence pour $k \geq np_2$, sous réserve que l'approximation $\frac{n}{N_S} \simeq \frac{(\alpha^2-1)r^2}{R_I^2}$ soit juste et pour des valeurs de n et N_S suffisamment grandes, on peut considérer que :

$$\mathbb{P}(K \geq k) \geq \mathbb{P}(K \geq k | N = n). \quad (4.10)$$

Dans une image où la position des segments est uniforme on aura donc a priori moins de détections avec le nombre de fausses alarmes sans contexte qu'avec celui où on inclut une information de contexte.

La figure 4.8 illustre ce résultat. On y a représenté les deux types de nombres de fausses alarmes, avec et sans contexte. La première figure représente les équivalents donnés par les grandes déviations de $\log \mathbb{P}(K \geq k | N = n)$ et de $\log \mathbb{P}(K \geq k)$. On voit que la première courbe (nombre de fausses alarmes avec contexte) est en-dessous de la seconde (nombre de fausses alarmes sans contexte), ce qui montre que les détections avec le premier nombre de fausses alarmes seront plus nombreuses qu'avec le second. Ce résultat se voit également sur la deuxième figure, représentant les probabilités (empiriques) $\mathbb{P}(K \geq k | N = n)$ et $\mathbb{P}(K \geq k)$, la première est plus petite que la seconde, donc une même observation $k(\mathbf{x}, r, \alpha)$ dans une couronne

$\mathcal{C}(\mathbf{x}, r, \alpha)$ sera plus significative avec le nombre de fausses alarmes avec contexte qu'avec celui sans contexte.

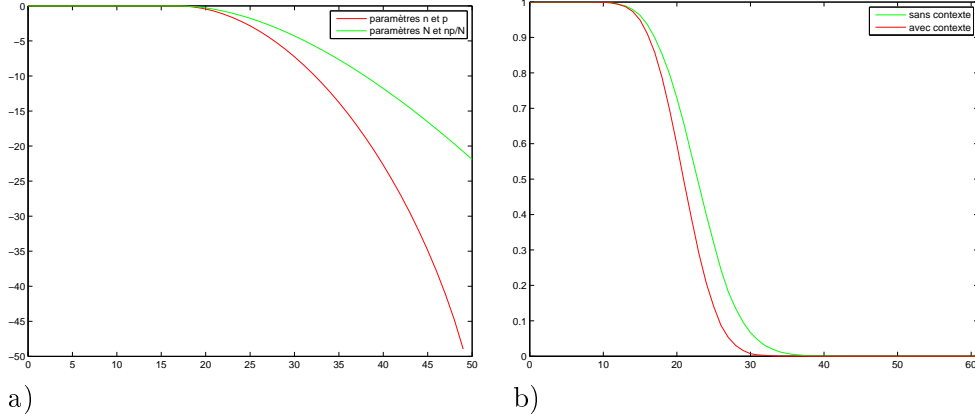


FIGURE 4.8 – a) On a tracé les équivalents donnés par les grandes déviations de $k \mapsto \log \mathbb{P}(K \geq k|N = n)$, lorsque K suit une loi binomiale de paramètres n et p conditionnellement à $N = n$ (pour le nombre de fausses alarmes avec contexte) et de $k \mapsto \log \mathbb{P}(K \geq k)$ lorsque K suit une binomiale de paramètres N_S et $\frac{np}{N_S}$ (pour le nombre de fausses alarmes sans contexte). Pour obtenir ces graphes les valeurs de N_S, n, p sont respectivement 1000, 50 et 0.33. b) On a tracé les probabilités $k \mapsto \mathbb{P}(K \geq k)$ et $k \mapsto \mathbb{P}(K \geq k|N = n)$, évaluées par les fréquences empiriques des événements $K \geq k$ et $K \geq k|N = n$.

4.2.5 Modèles a contrario

Dans cette section nous explicitons les différents modèles a contrario qui ont été utilisés pour les détections de convergences. Les modèles supposent tous les segments indépendants.

Le modèle uniforme sera spécifié par la densité du triplet (s_1, s_2, θ) avec $\theta \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ l'angle entre l'axe horizontal et le segment.

En présence d'une convergence globale des segments il est plus simple de se donner un modèle en spécifiant la densité du triplet (s_1, s_2, φ) où $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est l'angle entre la droite (SM) et le segment lorsqu'on suppose une convergence principale située en M , puis éventuellement de calculer la loi sur l'angle θ .

4.2.5.1 Loi gaussienne sur l'orientation

Lorsque les segments convergent globalement vers un point M il est plus intéressant de considérer pour un segment l'angle φ_M (noté plus simplement φ quand il n'y a pas de risque de confusion avec l'angle φ des droites support) entre le segment et la droite passant par le centre S du segment et le point M . De plus lorsqu'il y a une convergence globale les valeurs petites de φ sont privilégiées. Lorsqu'elle tient compte d'une convergence globale la densité sur φ doit donc avoir la forme d'une

gaussienne, à la différence près que le support de φ est l'intervalle borné $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. La loi souhaitée peut dépendre d'un paramètre $\sigma > 0$ qui caractérise sa dispersion. Lorsqu'on s'est donné une densité sur φ qui remplit ces conditions, on peut obtenir la densité sur la variable θ .

Nous proposons plusieurs façons de définir une telle loi. L'inconvénient principal est que la variable φ est à support borné, et ne peut donc pas être modélisée directement par la loi normale. L'idée que nous avons utilisée est de trouver une fonction de φ bijective de $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ dans \mathbb{R} , et de modéliser l'image de φ par cette fonction par une variable aléatoire gaussienne. Une première proposition consiste à modéliser $\tan \varphi$ par une loi normale, puis à utiliser la relation $\varphi = \arctan(\tan \varphi)$ pour obtenir l'expression de la densité de φ après inversion de celle de la loi normale.

Proposition 4.2.2 (Inversion de \tan). *La fonction suivante est une densité de probabilité sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.*

$$\tilde{g}_{\mu, \sigma^2}(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-(\tan u - \mu)^2/2\sigma^2}}{\cos^2 u}.$$

De plus si $\mu = 0$ la loi est centrée.

Démonstration. Soit $\varphi \in]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. On pose $X = \tan(\varphi)$ et on suppose cette variable aléatoire gaussienne, de moyenne μ et de variance σ^2 . Alors $\varphi = \arctan(X)$ et on peut calculer la densité de φ : pour toute fonction f mesurable sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$\mathbb{E}(f(\varphi)) = \mathbb{E}(f(\arctan X)) \quad (4.11)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} f(\arctan x) g_{\mu, \sigma^2}(x) dx \quad (4.12)$$

$$= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(\varphi) g_{\mu, \sigma^2}(\tan \varphi) \frac{d\varphi}{\cos^2 \varphi}, \quad (4.13)$$

où

$$g_{\mu, \sigma^2}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}.$$

La variable φ a donc pour densité

$$\tilde{g}_{\mu, \sigma^2}(u) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \frac{e^{-(\tan u - \mu)^2/2\sigma^2}}{\cos^2 u}. \quad (4.14)$$

Le profil de la densité de φ varie en fonction des valeurs de σ^2 et de μ . Supposons dans un premier temps que $\mu = 0$. Pour obtenir les variations de la densité de φ on la dérive :

$$\tilde{g}'_{\mu, \sigma^2}(u) = \tilde{g}_{\mu, \sigma^2}(u) \left[2 \tan u - \frac{\tan u - \mu}{\sigma^2 \cos^2 u} \right], \quad (4.15)$$

et en utilisant $\mu = 0$ on a

$$\tilde{g}'_{0, \sigma^2}(u) = \tilde{g}_{0, \sigma^2}(u) \frac{\tan u}{\sigma^2} \left[2\sigma^2 - \frac{1}{\cos^2 u} \right]. \quad (4.16)$$

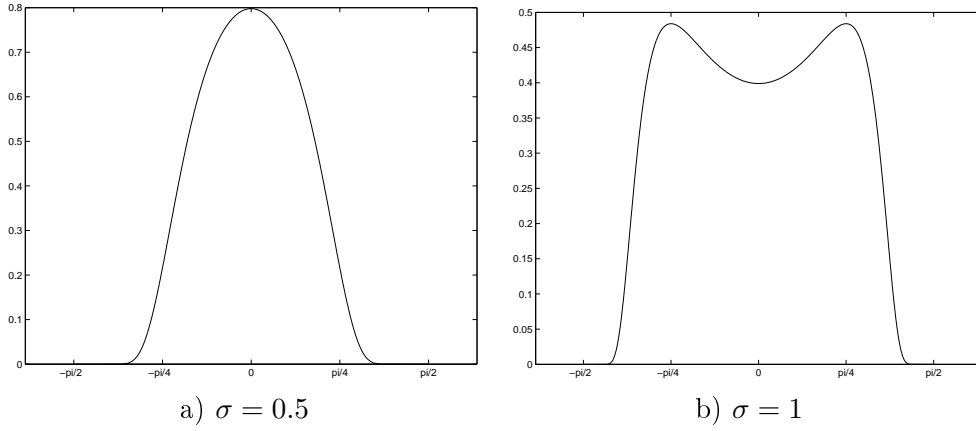


FIGURE 4.9 – Densité sur l'angle φ obtenue par inversion de la densité de $\tan \varphi$ supposée gaussienne centrée, de variance σ^2 .

Ce dernier terme s'annule si et seulement si $\cos u = \frac{1}{\sqrt{2}\sigma}$ ce qui est possible uniquement si $\sigma > \frac{1}{\sqrt{2}} \simeq 0.70$. \square

La Figure 4.9 montre le profil de deux densités obtenues en supposant que $\tan \varphi$ suivait la loi normale centrée et de variance σ^2 pour deux valeurs de ce paramètre. Pour des valeurs de σ assez grandes la loi donnée par inversion de \tan n'a pas une densité décroissante sur \mathbb{R}^+ . Pourtant, lorsqu'on veut modéliser une convergence il est souhaitable que la loi sur φ ne présente qu'un seul mode en 0. Les petites valeurs de φ sont plus probables en présence d'une convergence globale des segments. Le comportement de cette loi pour de "grandes" valeurs de σ est la raison pour laquelle nous proposons d'autres méthodes de définition d'une loi "gaussienne" sur l'angle φ .

Proposition 4.2.3 (Inversion de sin). *La fonction suivante est une densité de probabilité sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.*

$$\tilde{g}_\sigma(u) = \frac{1}{\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-1}{\sigma}\right)} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\sin^2 u / 2\sigma^2} \cos u.$$

De plus la fonction \tilde{g}_σ converge simplement vers la fonction $u \mapsto \frac{\cos u}{2}$ lorsque $\sigma \rightarrow +\infty$.

Démonstration. Le changement de variable $\varphi = \arcsin(X)$ est bijectif de $]-1, 1[$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

On suppose que la variable $\sin \varphi$ a pour densité sur $[-1, 1]$ la fonction $x \mapsto \frac{1}{\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \Phi\left(\frac{-1}{\sigma}\right)} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2}$ (obtenue en restreignant la densité de la loi normale centrée de variance σ^2 à l'intervalle $[-1, 1]$).

Alors pour toute fonction f mesurable on a

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}(f(\varphi)) &= \mathbb{E}(f(\arcsin(X))) \\
 &= \int_{-1}^1 f(\arcsin(x)) \frac{1}{\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{\sigma}\right)} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2\sigma^2} dx \\
 &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(\varphi) \frac{1}{\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{\sigma}\right)} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\sin^2 \varphi / 2\sigma^2} \cos \varphi d\varphi,
 \end{aligned}$$

ce qui donne la densité de φ par identification.

Lorsque la variance σ^2 tend vers $+\infty$ cette densité tend vers la densité limite $u \mapsto \frac{\cos u}{2}$, en effet :

$$\begin{aligned}
 \sigma \left(\Phi\left(\frac{1}{\sigma}\right) - \Phi\left(-\frac{1}{\sigma}\right) \right) &= \sigma \int_{-1/\sigma}^{1/\sigma} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2} du \\
 &= \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-u^2/2\sigma^2} du \\
 &\xrightarrow{\sigma \rightarrow +\infty} \int_{-1}^1 \frac{1}{\sqrt{2\pi}} du = \sqrt{\frac{2}{\pi}},
 \end{aligned}$$

par le théorème de convergence dominée. □

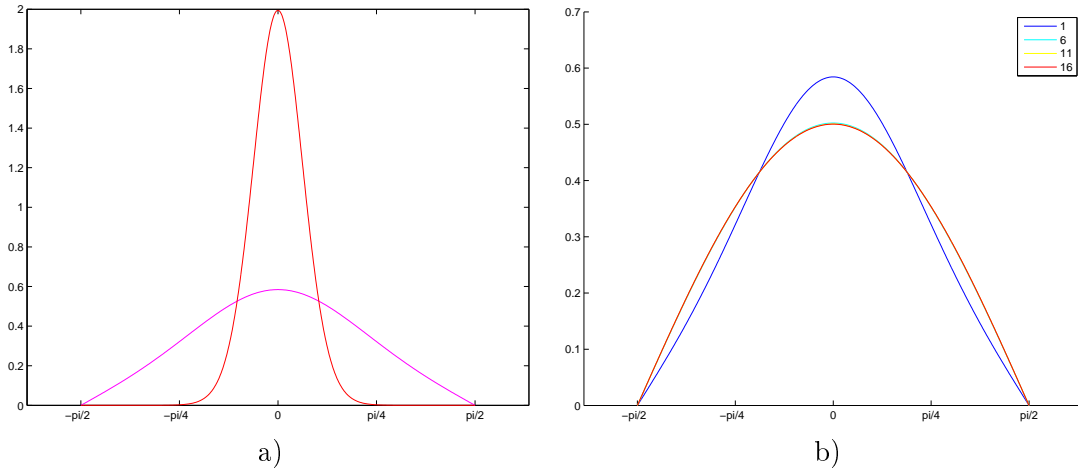


FIGURE 4.10 – Allure de la densité obtenue par inversion de sin. a) L'approximation par δ_0 est bonne lorsque σ est petit ($\sigma = 1$ ou $\sigma = 0.5$). b) La loi limite lorsque $\sigma \rightarrow +\infty$ est $u \mapsto \frac{\cos u}{2}$.

La figure 4.10 donne le profil de la loi sur φ obtenue par inversion de la loi sur $\sin \varphi$. Le comportement de cette loi pour de petites valeurs de σ est celui souhaité :

plus σ est petit plus le support de la loi est restreint autour de 0. Cependant, pour les grandes valeurs de σ ne convient pas : on ne retrouve pas le modèle uniforme sur φ .

La troisième solution que nous proposons est d'utiliser l'analogue de la loi normale sur le cercle que constitue la loi de Von Mises.

Définition 4.2.1 (Distribution de Von Mises). *La densité de la loi de von Mises est donnée sur $[0, 2\pi[$ par :*

$$f_{\mu,\kappa}(x) = \frac{e^{\kappa \cos(x-\mu)}}{2\pi I_0(\kappa)}, \quad (4.17)$$

où μ représente la direction modale et κ est un paramètre de concentration et où I_0 est la fonction de Bessel modifiée d'ordre 0. De plus cette densité est symétrique pour $\mu = \pi$ et si $\kappa = 0$ c'est la densité uniforme sur $[0, 2\pi[$.

Proposition 4.2.4 (Distribution de Von Mises sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$). *La fonction*

$$\tilde{f}_{\mu,\kappa}(x) = 2f_{\mu,\kappa}(2x + \pi), \quad (4.18)$$

est une densité de probabilité pour la variable φ sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$. En particulier on a

$$\tilde{f}_{\pi,\kappa}(x) = 2f_{\pi,\kappa}(2x + \pi) = \frac{e^{\kappa \cos(2x)}}{\pi I_0(\kappa)}. \quad (4.19)$$

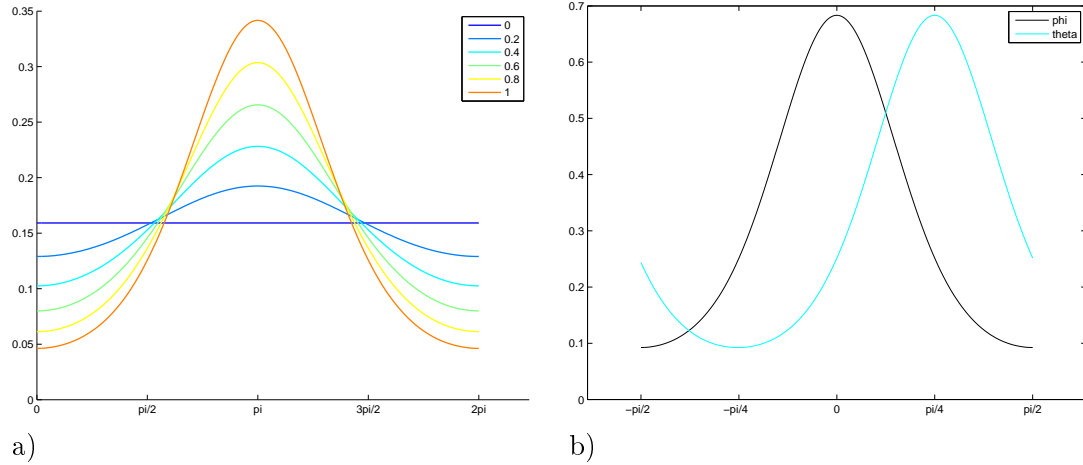


FIGURE 4.11 – a) Allure de la distribution de von Mises pour $\mu = \pi$ et différentes valeurs de κ . b) Densité sur $] -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ de l'angle entre le segment et la direction de convergence φ (noir) et de θ (cyan).

Nous avons introduit deux paramétrages de l'orientation des segments : l'une par rapport à l'axe horizontal spécifiée par la variable θ , et l'autre par rapport à un point M fixe donnée par la variable φ . Ces deux paramétrisations sont représentées Figure

4.12. La loi sur φ induit une loi sur l'orientation θ par rapport à l'axe horizontal des segments. Le lien entre la loi sur φ et celle sur θ est donnée par la proposition suivante, illustré par la Figure 4.11.

Proposition 4.2.5 (Lien entre θ et φ). *On a*

$$\theta = \varphi + \arctan\left(\frac{y_M - s_2}{s_1 - x_M}\right) \pmod{\pi}.$$

De plus si g est la densité de φ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ alors la densité de θ se déduit par la formule

$$\tilde{g}(\theta) = g_{\pi\text{-per}}\left(\theta - \arctan\left(\frac{y_M - s_2}{s_1 - x_M}\right)\right) \Big|_{]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[},$$

obtenue en faisant le changement de variable $\theta \leftarrow \varphi + \arctan\left(\frac{y_M - s_2}{s_1 - x_M}\right)$ puis en périodisant la densité g et en prenant sa restriction à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

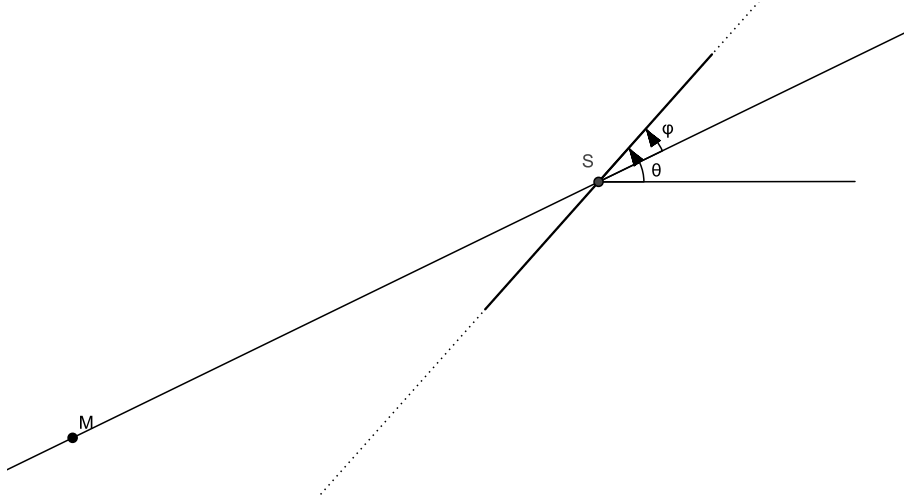


FIGURE 4.12 – Paramétrage de l'orientation d'un segment par rapport à l'horizontale (θ) ou par rapport à un point M (φ).

Dans la suite, pour modéliser une convergence globale des segments vers un point M nous avons choisi d'utiliser la loi de Von Mises.

4.2.5.2 Positions déterministes, positions uniformes

Tous les modèles a contrario supposent connu le nombre de segments, ainsi que leur indépendance. Nous les supposons de plus identiquement distribués. Dans la suite nous explicitons le modèle de bruit en donnant la loi de la position des segments et la loi de l'orientation θ ou φ sachant la position.

Position s_1, s_2	Orientation θ	
déterministe	$\theta = \varphi + \arctan \left(\frac{-y_M + s_2}{x_M - s_1} \right)$ (mod π) où $\varphi \sim \tilde{f}_{\pi, \kappa}$	M1
s_1, s_2 connues	$\theta \sim \mathcal{U}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$	M2
uniforme $f_{s_1, s_2} = \frac{1}{\pi R^2} \mathbb{1}_\Omega$	$\theta = \varphi + \arctan \left(\frac{-y_M + s_2}{x_M - s_1} \right)$ (mod π) où $\varphi \sim \tilde{f}_{\pi, \kappa}$	M3
	$\theta \sim \mathcal{U}$ sur $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$	\rightarrow modèle uniforme M4

TABLE 4.2 – Description de quatre modèles a contrario élémentaires : les positions sont soit uniformes, soit connues. L'orientation est soit uniforme indépendante de (s_1, s_2) , soit construite à partir d'une variable "gaussienne" φ indépendante de la position (s_1, s_2) . Pour les modèles **M1** et **M3** la variable φ est de densité la loi de Von Mises. Dans ce cas la loi de θ se retrouve à partir de $\tilde{f}_{\pi, \kappa}$ et θ n'est pas indépendante de (s_1, s_2) .

Nous avons distingué deux familles de modèles : ceux qui supposent les positions des segments uniformément distribuées dans le disque image et ceux qui supposent les positions des segments connues. Supposer que les positions des segments sont uniformément distribuées c'est choisir la loi la plus aléatoire possible, c'est introduire le moins d'information dans le modèle a contrario. L'extrême inverse c'est de considérer les positions déterministes : l'aléa ne porte que sur l'orientation de chaque segment de l'image.

Les premiers se décrivent par la densité sur le triplet (s_1, s_2, θ)

$$f(s_1, s_2, \theta) = \mathbb{1}_{\{s_1^2 + s_2^2 \leq R_I^2\}} g(\theta | s_1, s_2), \quad (4.20)$$

où la fonction g est une densité de probabilité sur θ soit uniforme, soit décrivant une convergence globale vers un point M .

Pour les seconds, seule la loi de θ sachant la position est à spécifier. Quand le modèle a contrario suppose les positions déterministes, les positions $(s_1^n, s_2^n)_n$ sont des données fixes. Seules les orientations des segments sont aléatoires, indépendantes et distribuées selon une densité g , qui peut être la loi uniforme ou une densité dérivée d'une loi de Von Mises par rapport à un point M . Sous ce type de modèle de bruit le nombre $N(\mathbf{x}, r, \alpha)$ de segments dans la couronne $\mathcal{C}(\mathbf{x}, r, \alpha)$ est connu.

Le tableau 4.2 résume les différents modèles expérimentés dans la suite de ce manuscrit.

4.2.5.3 Modèle de mélange sur les segments

Comme nous l'avons fait au Chapitre 3 on peut définir des modèles de mélanges, à partir des modèles évoqués précédemment pour tenir compte du fait qu'une partie des segments est naturellement convergente vers un point M . On se donne donc un point M et on considère la variable φ donnant l'orientation des segments par rapport au point M . Nous définissons le modèle de mélange sur φ suivant :

$$f_{p,\kappa}(\varphi) = (1-p)\frac{1}{\pi} + p\frac{e^{\kappa \cos(2\varphi)}}{\pi I_0(\kappa)}. \quad (4.21)$$

Ce modèle est paramétrique : il comprend un terme uniforme de poids $(1-p)$ et un terme dérivé de la loi Von Mises de poids p et de paramètre κ .

Pour achever de spécifier un modèle a contrario de type mélange, il suffit de le compléter par la loi suivie par les positions des segments. Elles peuvent être uniformes ou connues. Quand on se donne une loi de type (4.21) sur l'orientation de segments indépendants on décrit une image dans laquelle il y aurait une convergence globale des segments vers le point M , ainsi que d'autres segments répartis uniformément et d'orientation quelconque vis-à-vis du point M .

4.2.5.4 Probabilité de converger vers le centre d'une couronne

Le calcul du nombre de fausses alarmes dans chacun des modèles **M1**, **M2**, **M3**, **M4** fait intervenir la probabilité qu'un segment converge vers le centre d'une couronne. Nous explicitons ici cette probabilité pour chacun de ces modèles.

Positions déterministes On considère une couronne $\mathcal{C}(\mathbf{x}, r, \alpha)$ et un segment S centré en (s_1, s_2) connue et d'orientation θ aléatoire distribuée selon une densité g (qui est soit uniforme, soit de type "gaussienne").

La probabilité $p(\mathbf{x}, r, s_1, s_2)$ que ce segment converge vers le centre $B(\mathbf{x}, r)$ de la couronne est la probabilité que θ vérifie (Figure 4.13) :

$$|\theta - \arctan \frac{s_2 - x_2}{x_1 - s_1}| \leq \arcsin \frac{r}{\|\mathbf{s}\mathbf{x}\|} \pmod{\pi}. \quad (4.22)$$

On note I_{SX} l'intervalle des valeurs de θ qui réalisent cette condition. On a donc

$$p(\mathbf{x}, r, s_1, s_2) = \int_{I_{SX}} g(\theta) d\theta. \quad (4.23)$$

Dans le cas du modèle **M2** où l'orientation est uniforme cette probabilité s'exprime facilement

$$p(\mathbf{x}, r, s_1, s_2) = \frac{2}{\pi} \arcsin \frac{r}{\|\mathbf{s}\mathbf{x}\|}, \quad (4.24)$$

où \mathbf{s} est le centre du segment et $\|\mathbf{s}\mathbf{x}\|$ est la distance entre \mathbf{s} et le centre \mathbf{x} de la couronne.

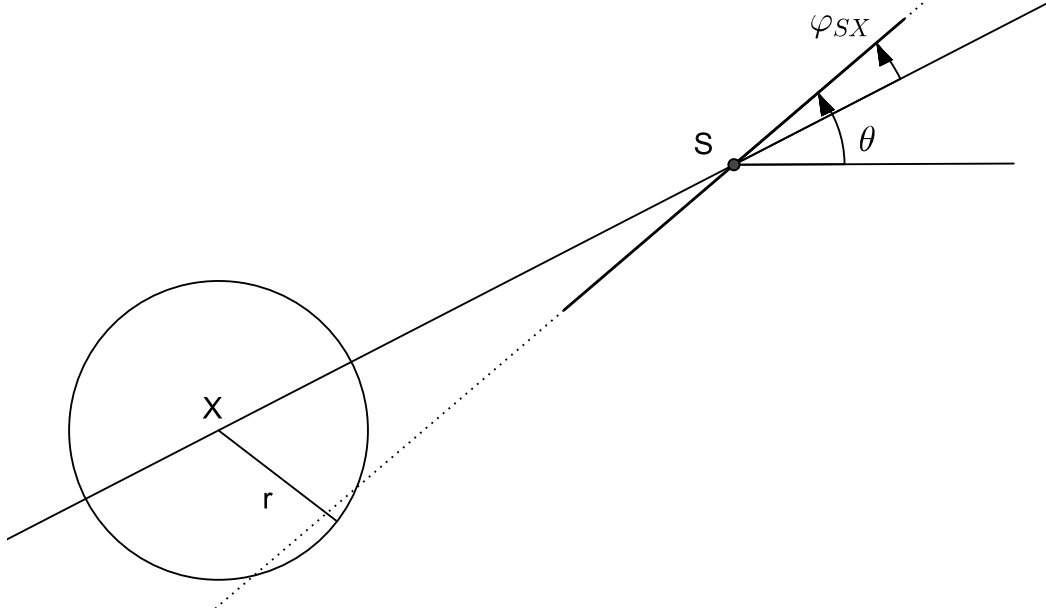


FIGURE 4.13 – Paramétrage de l'orientation d'un segment pour déterminer s'il intersecte un disque $B(\mathbf{x}, r)$.

Si la densité de θ n'est pas la loi uniforme (par exemple si on a spécifié l'orientation par une loi de Von Mises sur φ par rapport à un point M) ce calcul n'est pas simplifiable.

Pour les expériences cette probabilité a simplement été évaluée par une somme de Riemann.

Positions uniformes On considère une couronne $\mathcal{C}(\mathbf{x}, r, \alpha)$. Pour les modèles **M3**, **M4** la probabilité intervenant dans le nombre de fausses alarmes est la probabilité qu'un segment de la couronne converge vers le centre du disque de centre \mathbf{x} et de rayon r noté $B(\mathbf{x}, r)$. Sous ces modèles on considère les positions des segments inconnues (uniformes sur le domaine de l'image) et la probabilité qu'un segment de la couronne converge vers le centre de celle-ci s'exprime de manière analogue à la probabilité qu'une droite de l'image intersecte la région V (cf Chapitre 3) : c'est le quotient de la mesure des segments dans la couronne et orientés vers son centre, par la mesure des segments qui sont dans la couronne.

$$p_f(\mathbf{x}, r, \alpha) = \frac{\mu_f(S \in \mathcal{C}(\mathbf{x}, r, \alpha) \text{ et } S \text{ converge vers } B(\mathbf{x}, r))}{\mu_f(S \in \mathcal{C}(\mathbf{x}, r, \alpha))}. \quad (4.25)$$

Dans le cas du modèle uniforme **M4** la probabilité $p_1(\mathbf{x}, r, \alpha)$ se calcule explicitement et vaut

$$p_1(\mathbf{x}, r, \alpha) = \frac{2}{\pi \alpha^2 - 1} \left[\alpha^2 \arcsin \left(\frac{1}{\alpha} \right) + \sqrt{\alpha^2 - 1} - \frac{\pi}{2} \right]. \quad (4.26)$$

Elle ne dépend pas de la position de la couronne car le modèle uniforme est invariant par translation, ni de r par homogénéité.

Démonstration. Par définition la probabilité qu'un segment de la couronne $\mathcal{C}(\mathbf{x}, r, \alpha)$ converge vers son centre $B(\mathbf{x}, r)$ s'écrit

$$p_1(\mathbf{x}, r, \alpha) = \frac{\mu_1(\mathcal{C}(\mathbf{x}, r, \alpha) \cap CV(\mathbf{x}, r))}{\mu_1(\mathcal{C}(\mathbf{x}, r, \alpha))}, \quad (4.27)$$

où on a noté $CV(\mathbf{x}, r)$ l'ensemble des triplets (s_1, s_2, θ) qui convergent vers $B(\mathbf{x}, r)$.

$$\mu_1(\mathcal{C}(\mathbf{x}, r, \alpha)) = \int \int_{\mathcal{C}(\mathbf{x}, r, \alpha)} \frac{1}{\pi R_I^2} ds_1 ds_2 = \frac{(\alpha^2 - 1)r^2}{R_I^2}. \quad (4.28)$$

Quant au numérateur

$$\begin{aligned} \mu_1(\mathcal{C}(\mathbf{x}, r, \alpha) \cap CV(\mathbf{x}, r)) &= \int \int_{\mathcal{C}(\mathbf{x}, r, \alpha)} \int_{-\arcsin(r/\|\mathbf{s}\mathbf{x}\|)}^{\arcsin(r/\|\mathbf{s}\mathbf{x}\|)} \frac{1}{\pi} d\theta \frac{1}{\pi R_I^2} ds_1 ds_2 \\ &= \int_{\rho=r}^{\alpha r} \int_{\varphi=0}^{2\pi} \frac{1}{\pi R_I^2} \frac{2}{\pi} \arcsin \left(\frac{r}{\rho} \right) \rho d\rho d\varphi \\ &= \int_{\rho=r}^{\alpha r} \frac{4}{\pi R_I^2} \rho \arcsin \left(\frac{r}{\rho} \right) d\rho \\ &= \frac{2\alpha^2 r^2}{\pi R_I^2} \arcsin \left(\frac{1}{\alpha} \right) + \frac{2\alpha r^2}{\pi R_I^2} \sqrt{1 - \frac{1}{\alpha^2}} \\ &= \frac{2}{\pi} \frac{1}{\alpha^2 - 1} \left[\alpha^2 \arcsin \left(\frac{1}{\alpha} \right) + \sqrt{\alpha^2 - 1} - \frac{\pi}{2} \right]. \end{aligned}$$

□

On peut aussi calculer la probabilité qu'un segment *de l'image* soit dans la couronne $\mathcal{C}(\mathbf{x}, r, \alpha)$ et converge vers le centre $B(\mathbf{x}, r)$. Dans ce cas seul le dénominateur de (4.25) est à changer et à remplacer par $\mu_1(S \cap \Omega) = 1$. C'est cette probabilité à laquelle le nombre de fausses alarmes sans contexte fait appel.

Dans le cas du modèle **M3**, la probabilité qu'un segment de la couronne converge vers le centre de celle-ci ne peut pas se calculer explicitement. La formule (4.25) a donc été évaluée numériquement en évaluant son numérateur par une somme de Riemann.

4.2.6 Calcul théorique et numérique du nombre de fausses alarmes

Nous considérons la forme du nombre de fausses alarmes incluant l'information contextuelle $N(\mathbf{x}, r, \alpha) : \text{NFA}(\mathbf{x}, r, \alpha) = N_T \mathbb{P}(K \geq K(\mathbf{x}, r, \alpha) | N = N(\mathbf{x}, r, \alpha))$. Nous allons expliciter cette expression dans le cas des quatre modèles **M1**, **M2**, **M3** et **M4**.

4.2.6.1 Loi binomiale, équivalent grandes déviations, inégalité de Hoeffding

Lorsque le modèle a contrario suppose les positions uniformes et les segments indépendants, le nombre $K(\mathbf{x}, r, \alpha)$ des segments d'une couronne qui convergent vers son centre suit conditionnellement à $N(\mathbf{x}, r, \alpha)$ une loi binomiale $\mathcal{B}(N(\mathbf{x}, r, \alpha), p_f(\mathbf{x}, r, \alpha))$. Le paramètre $p_f(\mathbf{x}, r, \alpha)$ est la probabilité qu'un segment de la couronne converge vers le centre sous le modèle de bruit spécifié par la densité f du triplet (s_1, s_2, θ) .

Le nombre de fausses alarmes s'écrit alors

$$\text{NFA}(\mathbf{x}, r, \alpha) = N_T \mathcal{B}(N(\mathbf{x}, r, \alpha), K(\mathbf{x}, r, \alpha), p_f(\mathbf{x}, r, \alpha)), \quad (4.29)$$

où $\mathcal{B}(n, k, p) = \sum_{j=k}^n \binom{n}{j} p^j (1-p)^{n-j}$ est la queue de la binomiale. Le calcul numérique de cette expression, lorsque $N(\mathbf{x}, r, \alpha)$ est grand et $p_f(\mathbf{x}, r, \alpha)$ est petit est instable. On remplace donc cette expression par son équivalent des grandes déviations (on calcule plutôt $\log \text{NFA}(\mathbf{x}, r, \alpha)$).

Le nombre de fausses alarmes sous les modèles **M3**, **M4** prend donc la forme

$$\log \text{NFA} \simeq \log N_T - N \left[\frac{K}{N} \log \left(\frac{K}{N p_f} \right) + \left(1 - \frac{K}{N} \right) \log \left(\frac{1 - \frac{K}{N}}{1 - p_f} \right) \right], \quad (4.30)$$

où on a omis de rappeler la dépendance des variables N, K et p_f en fonction de \mathbf{x}, r, α pour alléger les notations.

4.2.6.2 Loi Poisson binomiale, inégalité de Hoeffding

Dans le cas des modèles **M1** et **M2** les segments $S_i, i = 1 \dots N$, d'une même couronne $\mathcal{C}(\mathbf{x}, r, \alpha)$ ont des probabilités $p_i, i = 1 \dots N$, de converger vers le centre $B(\mathbf{x}, r)$ distinctes a priori (dans le cas uniforme elles sont égales pour deux segments équidistants du centre).

Le nombre K des segments qui convergent parmi les N ne suit donc pas une loi binomiale dans le cas général mais plutôt une loi Poisson binomiale de paramètres $p_i, i = 1, \dots, N$.

La densité de probabilité (discrète) s'écrit

$$\mathbb{P}(K = k) = \sum_{A \subset [1, N], |A|=k} \prod_{i \in A} p_i \prod_{i \in A^c} (1 - p_i). \quad (4.31)$$

Le calcul d'une telle loi est numériquement instable pour un grand nombre N ou des petits p_i . On utilise donc plutôt la majoration suivante [16].

Théorème 4.2.2 (Inégalité de Hoeffding). *Soient X_1, \dots, X_n des variables indépendantes de Bernoulli avec les paramètres p_1, \dots, p_n . On définit $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ et $p = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n p_i$.*

$$\log \mathbb{P}(S_n \geq k) \leq -n \left[\frac{k}{n} \log \frac{k}{n p} + \left(1 - \frac{k}{n} \right) \log \frac{1 - k/n}{1 - p} \right]. \quad (4.32)$$

Démonstration. Cette démonstration figure dans [16] p.58 sous la forme d'un problème. \square

Puisque le nombre de fausses alarmes est remplacé par un majorant, le nombre d'événements ε -significatifs reste en moyenne inférieur à ε dans une image où les segments vérifieraient l'hypothèse a contrario.

4.3 Expériences

4.3.1 Exemples synthétiques

Les quatre modèles a contrario précédemment définis dans le tableau 4.2 ont été testés sur des exemples synthétiques représentant des situations types. Elles sont expliquées dans le tableau suivant.

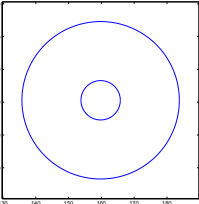
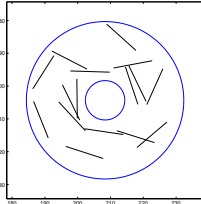
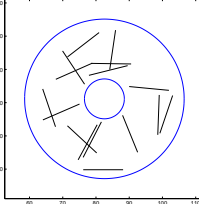
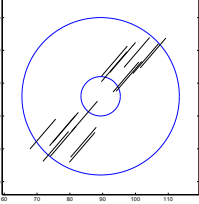
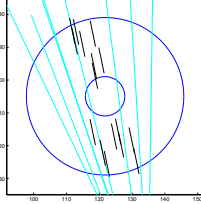
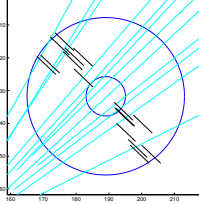
Situation 1	Situation 2	Situation 3
		
Couronne sans segments	$N \gg 1, K = 0$	$N \gg 1, K \gg 1$
Situation 4	Situation 5	Situation 6
		
$K \gg 1$ Segments //	$K \gg 1$ Segments // direction M	$K \gg 1$ Segments // direction $\neq M$

FIGURE 4.14 – Situations théoriques : vide localisé, présence d'une couronne avec une surdensité de segments, convergeant vers son centre ou non, surdensité de segments parallèles en présence ou non d'une convergence globale, alignés ou non vers le point de convergence globale.

Les deux premières situations ne renvoient aucun événement significatif contre chacun des quatre modèles, ce à quoi on s'attendait. En revanche les quatre autres renvoient des résultats différents selon le modèle a contrario choisi.

La méthode de détection des convergences locales a été testée sur des ensembles synthétisés de segments. Tous les ensembles de segments comportent $N_S = 100$ segments et les segments sont simulés dans une image circulaire de rayon $R_I = 64$ selon la loi uniforme. Localement on a rajouté quelques segments pour représenter

les situations types à examiner. Ainsi la Figure 4.15 représente une surdensité locale de segments parallèles, sur la Figure 4.16 est représentée une surdensité locale de segments qui ne convergent pas nécessairement vers la même couronne, enfin Figure 4.17 on a rajouté aux segments uniformément distribués une surdensité de segments convergeant vers le même point. Le rayon de test est $r = 4$ et le paramètre α vaut 4.

Le nombre de fausses alarmes utilisé est le nombre de fausses alarmes avec contexte $N_T \mathbb{P}(K \geq K(\mathbf{x}, r, \alpha) | N = N(\mathbf{x}, r, \alpha))$.

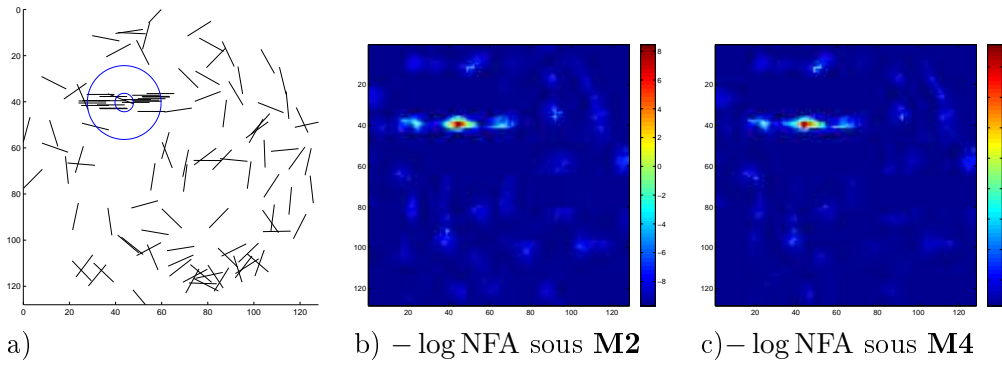


FIGURE 4.15 – Detections contre les modèles a contrario **M2** et **M4** d'un même ensemble de segments uniformément distribués avec une surdensité locale de segments parallèles (a)). Seuls les modèles supposant l'orientation uniforme ont été testés. b) **M2** c) **M4** La surdensité locale de segments parallèles est significative pour ces deux modèles de bruit.

Dans la Figure 4.15 on voit que la surdensité locale de segments parallèles apparaît significative contre les deux modèles a contrario **M2** et **M4**. L'explication est que, compte tenu de la valeur locale de $N(\mathbf{x}, r, \alpha)$ la valeur de $K(\mathbf{x}, r, \alpha)$ est beaucoup trop grande selon le modèle uniforme. En effet tous les segments ou presque convergent vers le centre de la couronne, alors que si l'orientation avait été uniforme la proportion de segments convergeant vers le centre aurait plutôt été de l'ordre de $N(\mathbf{x}, r, \alpha)p(\mathbf{x}, r, \alpha)$.

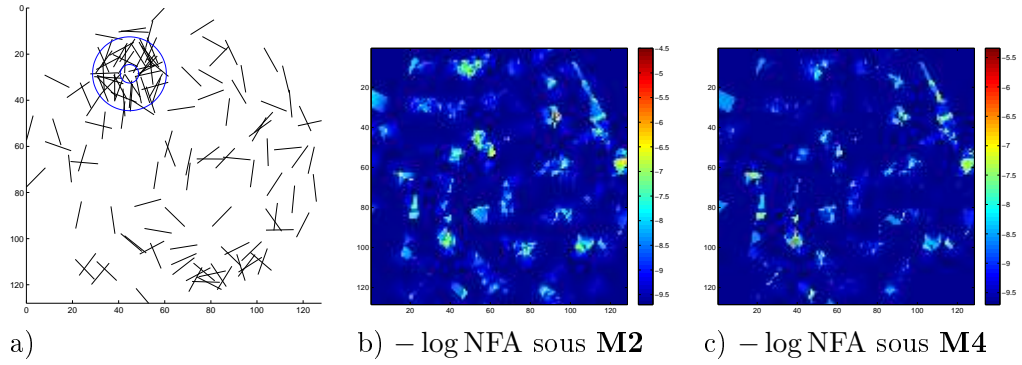


FIGURE 4.16 – Détections contre les modèles a contrario **M2** et **M4** d'un même ensemble de segments uniformément distribués avec une surdensité de segments qui convergent ou non vers le centre de la couronne. La surdensité de segments n'apparaît pas significative. La valeur de $K(\mathbf{x}, r, \alpha)$ au voisinage de la couronne est trop faible, même si $N(\mathbf{x}, r, \alpha)$ est grande. Pour le nombre de fausses alarmes $N_T \mathbb{P}(K \geq K(\mathbf{x}, r, \alpha) | N = N(\mathbf{x}, r, \alpha))$ cette couronne n'est pas significative.

Dans l'exemple Figure 4.16 on est en présence d'une surdensité de segments dont une partie convergente vers un même centre. Or il n'y a aucune détection significative contre les deux modèles uniformes testés. C'est une limite de l'utilisation du nombre de fausses alarmes avec contexte. Selon ce NFA la couronne n'est pas significative, elle contient beaucoup de segments, mais il n'y en a pas suffisamment parmi eux qui sont convergents. Visiblement cette localité dans l'image est remarquable, mais elle ne sera pas significative avec ce nombre de fausses alarmes.

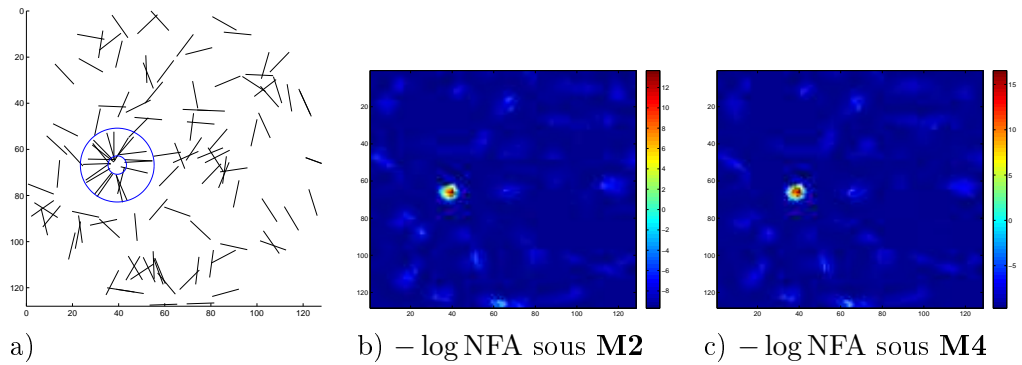


FIGURE 4.17 – Détections contre les modèles a contrario **M2** et **M4** d'un même ensemble de segments uniformément distribués avec localement une surdensité de segments qui convergent vers le centre de la couronne. La couronne est significative, on a $-\log \text{NFA} = -\log \mathbb{P}(K \geq K(\mathbf{x}, r, \alpha) | N = N(\mathbf{x}, r, \alpha)) > 0$ contre les deux modèles testés, la valeur de $K(\mathbf{x}, r, \alpha)$ est suffisamment grande localement pour que cela soit détecté.

Inversement Figure 4.17, la convergence locale qui a été rajoutée artificiellement est bien détectée. Cette fois il y a une grande proportion ($\simeq 1$) des segments de la couronne qui converge vers son centre. C'est une contradiction au modèle uniforme, et c'est donc significatif.

Dans les exemples suivants on a simulé des convergences globales soit en simulant des droites selon une loi gaussienne puis en simulant des segments sur ces droites (Figure 4.18), soit en simulant les positions des segments uniformément dans l'image et en simulant une loi de Von Mises sur l'angle $\varphi(M)$ indépendante de la position (Figures 4.19, 4.20).

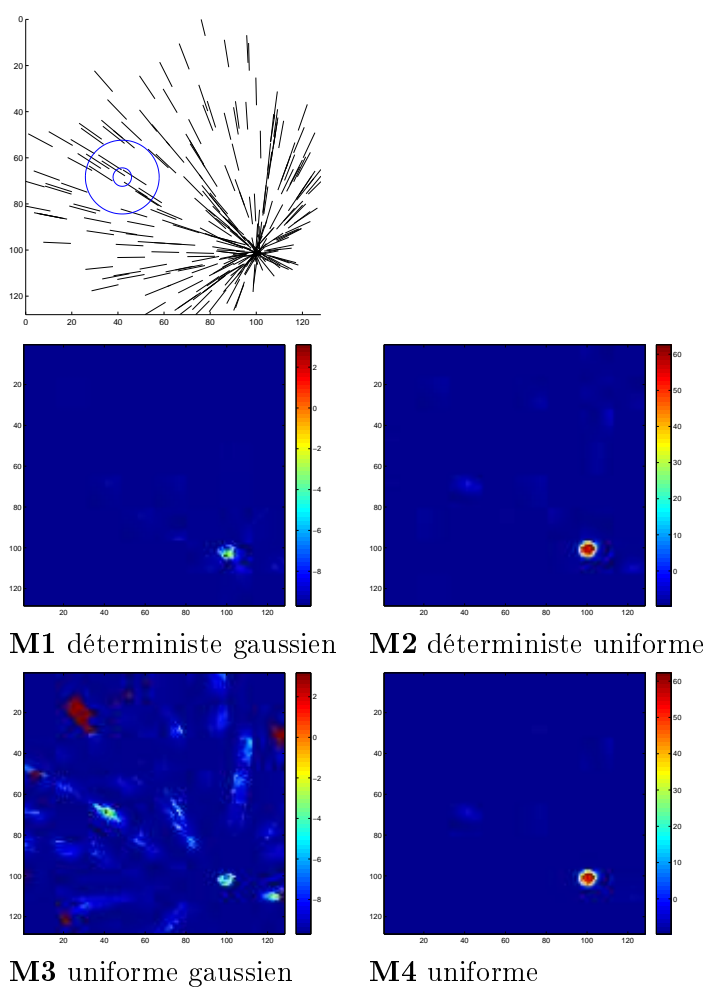


FIGURE 4.18 – Echantillon gaussien en direction du point $M(36, 36)$ avec une surdensité de segments parallèles alignés dans la direction du point M . La surdensité n'est pas significative contre les modèles gaussiens. La convergence globale est significative contre les modèles uniformes.

Dans la figure 4.18, la convergence globale est détectée contre les modèles "uniformes". Contre les modèles "gaussiens" elle ne l'est pas, même si elle reste l'événement.

nement *le plus significatif* de l'image, c'est-à-dire de nombre de fausses alarmes minimal. Une explication à cela, est que la loi utilisée pour la simulation des segments est assez différente de la loi a contrario. En effet pour simuler les segments, on a d'abord simulé leurs droites support avec une loi normale définie Chapitre 3 de paramètre $\sigma = 1$, puis on a tiré le segment uniformément sur l'intersection de sa droite support avec le domaine de l'image. Le paramètre de la loi de tirage des droites support est suffisamment petit pour que la convergence des droites soit très précise. Cela explique la surdensité locale de segments au point de convergence. En revanche l'hypothèse a contrario supposait l'orientation des segments distribuée selon une loi de Von Mises de paramètre $\kappa = 10$, qui n'explique pas que les convergences des segments vers le point $M(36, 36)$ soient si précises. Concernant la surdensité locale de segments parallèles : ils sont alignés dans la direction du point de convergence globale. Cela explique que cette surdensité locale ne soit pas significative lorsqu'on teste cette distribution de segments contre le modèle gaussien. Il faut cependant remarquer que $-\log \text{NFA}$ à cet endroit croît lorsqu'on passe du modèle **M1** au modèle **M3**. La surdensité locale est donc "plus significative" contre le modèle **M3** qui suppose les positions uniformes, et on peut voir effectivement que la répartition des segments à cet endroit n'est pas uniforme.

Dans les exemples 4.19 et 4.20 les segments ont été simulés avec une loi uniforme sur leur position et une loi de Von Mises sur leur orientation φ par rapport à un point M avec un paramètre $\kappa = 10$.

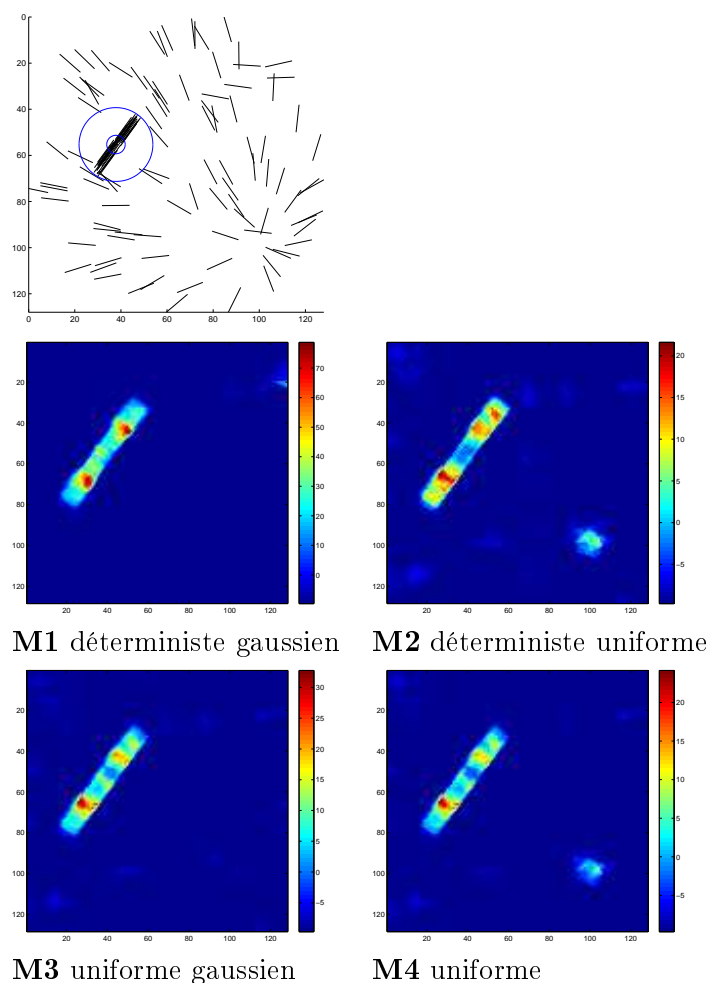


FIGURE 4.19 – Echantillon gaussien en direction du point $M(36, 36)$ avec une surdensité de segments parallèles non alignés dans la direction de convergence globale. Le point de convergence globale est significatif contre les modèles où l'orientation est uniforme, mais n'est pas détecté lorsqu'on teste contre les modèles gaussiens. La surdensité de segments parallèles est plus significative contre les modèles gaussiens.

Dans la figure 4.19, on a simulé des segments en tirant leur position uniformément dans le domaine de l'image, et en tirant leur orientation $\varphi(M)$, le point M étant fixé, indépendamment de leur position selon une loi de Von Mises, de paramètre $\kappa = 10$. Cela résulte en une convergence globale des segments. On a ensuite ajouté une surdensité de segments parallèles, de sorte qu'ils ne convergent pas vers le point M . Cette surdensité apparaît significative contre les quatre modèles de bruit testés. La convergence globale n'est significative que pour les modèles supposant l'orientation des segments uniforme.

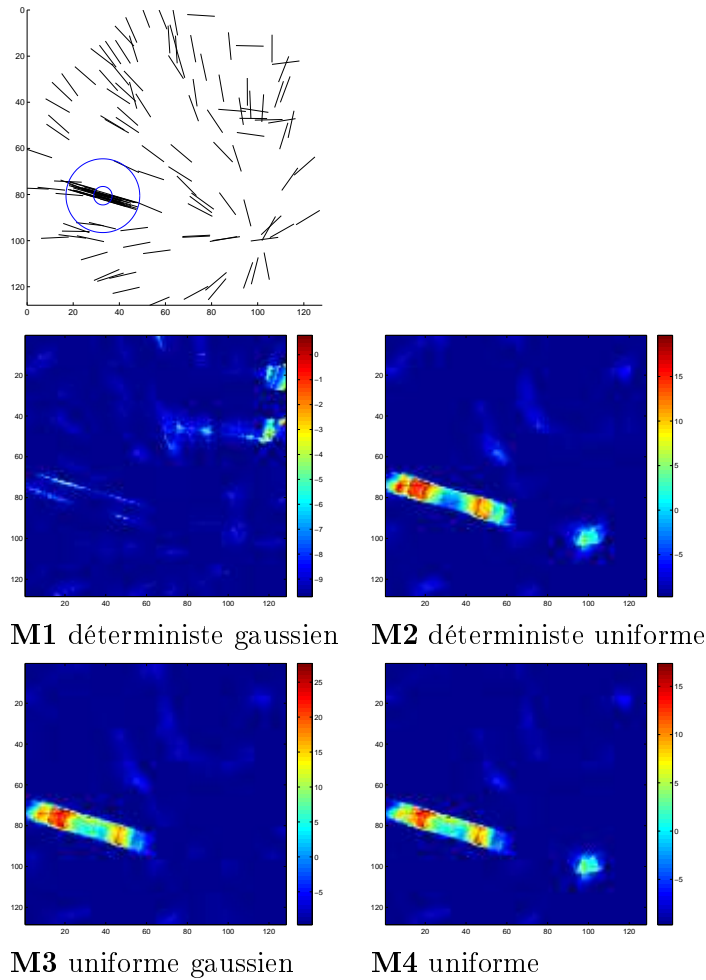


FIGURE 4.20 – Echantillon gaussien en direction du point $M(36,36)$ avec une surdensité de segments parallèles alignés dans la direction de convergence globale. Le point de convergence globale est significatif contre les modèles **M2**, **M4** où l'orientation est supposée uniforme. La surdensité locale de segments n'est pas significative contre le modèle gaussien **M1** alors qu'elle l'était dans l'exemple précédent. Elle reste significative contre le modèle **M3** qui suppose les positions uniformes. Cette surdensité de segments convergeant vers le même point est donc anormale contre tout modèle supposant les positions uniformes.

De même, Figure 4.20, la convergence globale est significative contre les modèles **M2** et **M4** et ne l'est pas contre les modèles gaussiens. Pour la surdensité locale, constituée de segments parallèles à peu près alignés vers le point de convergence globale, les résultats sont différents. On remarque en effet que ce n'est plus significatif contre le modèle **M1**, mais que ça l'est toujours contre le modèle **M3**. La raison en est que cette surdensité locale constitue un écart sensible au modèle "positions uniformes-orientations gaussiennes" car les segments sont trop nombreux, mais ne constitue pas un écart au modèle de bruit "positions déterministes-orientations gauss-

siennes". En effet à cet endroit les segments étant dirigés vers le point de convergence globale leur orientation vérifie le modèle de bruit gaussien.

4.3.2 Estimation d'un modèle de mélange

Afin de mieux détecter les convergences locales dans les mammographies nous avons mis en place un cadre a contrario anisotrope qui tient compte d'une orientation privilégiée des structures linéaires.

Le modèle de mélange auquel nous nous intéressons porte sur l'orientation des segments uniquement. Il comprend deux termes, l'un uniforme de poids $(1 - p)$ et l'autre "gaussien" de poids p . Le terme gaussien est modélisé par une loi de Von Mises, ramenée à l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et centrée, de paramètre κ .

Ainsi, un point M étant donné, la loi de l'angle φ des segments par rapport à ce point M est donnée par la densité

$$f_{p,\kappa}(\varphi) = (1 - p) \frac{1}{\pi} + p \frac{e^{\kappa \cos(2\varphi)}}{\pi I_0(\kappa)}, \quad (4.33)$$

définie sur l'intervalle $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$.

Les positions des segments sont quant à elles supposées uniformes dans le disque image.

Le but recherché est l'estimation du modèle de type (4.21) le plus proche de la répartition empirique des segments dans une image. Dans l'exemple des mammographies, il s'agit d'estimer le modèle de mélange pour lequel la convergence normale des spicules ne serait plus significative. La démarche est similaire à celle expliquée dans le chapitre 3. Il s'agit à la fois d'estimer le point de convergence globale M ainsi que les autres paramètres définissant le mélange p et κ .

L'estimation du point de convergence globale peut se faire par minimisation du nombre de fausses alarmes dans le cas du modèle uniforme sur les droites, en reprenant l'idée énoncée Chapitre 3.

Cependant une autre méthode est proposée. Elle est basée sur une autre caractérisation du point de convergence globale et reprend l'idée de la minimisation de $\sum_{n=1}^N d(\mathbf{x}, D_i)^2$. On minimise cette fois-ci la fonctionnelle $\sum_{i=1}^N \sin^2 \varphi_i(M)$ où $\varphi_i(M)$ est l'angle entre le segment S_i par rapport au point M . Ce critère sera développé plus en détail dans le Chapitre 5.

Cela donne une plus grande tolérance vis-à-vis des segments éloignés du point de convergence globale qu'avec le précédent critère. De plus, le fait que sin est borné limite l'influence des outliers et rend cette méthode attractive.

Les paramètres p et κ sont quant à eux estimés en maximisant la log-vraisemblance sur les données $\varphi_i(M)$, $\forall i \in 1, \dots, N$.

$$\mathcal{LL}(\varphi_1, \dots, \varphi_N; M, p, \kappa) = \sum_{i=1}^N \log \left((1 - p) \frac{1}{\pi} + p \frac{e^{\kappa \cos(2\varphi_i)}}{\pi I_0(\kappa)} \right). \quad (4.34)$$

L'algorithme suivant résume la procédure d'estimation du modèle de mélange paramétrique sur l'orientation des segments.

Algorithm 3 Estimation d'un modèle de mélange paramétrique sur les segments

Entrée: $(s_1^n, s_2^n, \theta^n)_{n=1, \dots, N}$
Sortie: $M, \hat{p}, \hat{\kappa}$

 Calcul de $\text{NFA}_1(\text{region}) \forall \text{region}$
 $\text{region}^* \leftarrow \text{argmin}_{\text{region}} \text{NFA}_1(\text{region})$
 $M \leftarrow \text{centre}(\text{region}^*)$

 Variante : $V(M) \leftarrow \sum_{n=1}^N \sin^2 \varphi_i(M), \forall M \in \Omega$
 $M \leftarrow \text{argmin}_M V(M)$

$$\mathcal{LL}(\varphi_1(M), \dots, \varphi_N(M); M, p, \kappa) = \sum_{i=1}^N \log \left((1-p) \frac{1}{\pi} + p \frac{e^{\kappa \cos(2\varphi_i)}}{\pi I_0(\kappa)} \right)$$

$$(\hat{p}, \hat{\kappa}) = \text{argmax}_{p, \kappa} \mathcal{LL}(\varphi_1(M), \dots, \varphi_N(M); p, \kappa)$$

4.3.3 Expériences sur des mammographies

Les exemples qui suivent illustrent la procédure complète : estimation du point de convergence globale (défini comme le centre de la région la plus significative contre le modèle uniforme sur les droites, ou comme le point minimisant $\sum_{n=1}^N \sin^2 \varphi_n(M)$), estimation des paramètres du mélange p et κ , détection locale multi-échelles contre le modèle estimé sur des couronnes de rayon intérieur $r = 2, 4, 6$ et de rapport $\alpha = 2, 4, 6$.

Dans l'exemple de la mammographie 4.21 les deux points de convergence estimés sont relativement proches. On voit cependant à l'examen des histogrammes que le point sélectionné par minimisation de la somme des $\sin^2 \varphi_n(M)$ est un meilleur candidat pour l'estimation d'un modèle de mélange de type (4.21). En effet le mode de l'histogramme est bien centré sur celui-ci alors que ça n'est pas vraiment le cas avec la première estimation du point M . La densité superposée n'est d'ailleurs pas adaptée au mode de l'histogramme. Néanmoins les deux modèles estimés donnent à peu près les mêmes détections significatives. Celles-ci sont très localisées, elles sont plus fortes quand on suppose les positions des segments déterministes ($-\log \text{NFA}$ est plus élevé).

La mammographie 4.22 est un exemple où la modélisation de la convergence globale par un terme de Von Mises n'est pas concluante. En effet pour chacune des deux estimations du point M l'histogramme des angles $\varphi_n(M)$ n'a pas de mode centré en 0. Cela se voit sur l'ensemble des segments, il y en a beaucoup sur le bord du sein, ce qui rend la convergence imprécise. C'est pour cela qu'on détecte encore des événements significatifs dans cette zone. Dans l'intérieur du sein les événements significatifs correspondent à des surdensités (relatives) des segments, c'est pour cela qu'on ne les détecte pas contre le modèle où les positions sont déterministes.

Dans l'exemple 4.23 le point le plus significatif contre le modèle uniforme sur les droites est à l'extérieur du domaine de l'image. Les deux points détectés induisent des histogrammes présentant chacun un mode centré en 0 qui est bien approché par la densité de type (4.21) estimée. Les détections contre le modèle estimé supposant les positions uniformes sont à peu près identiques. Concernant le modèle où les

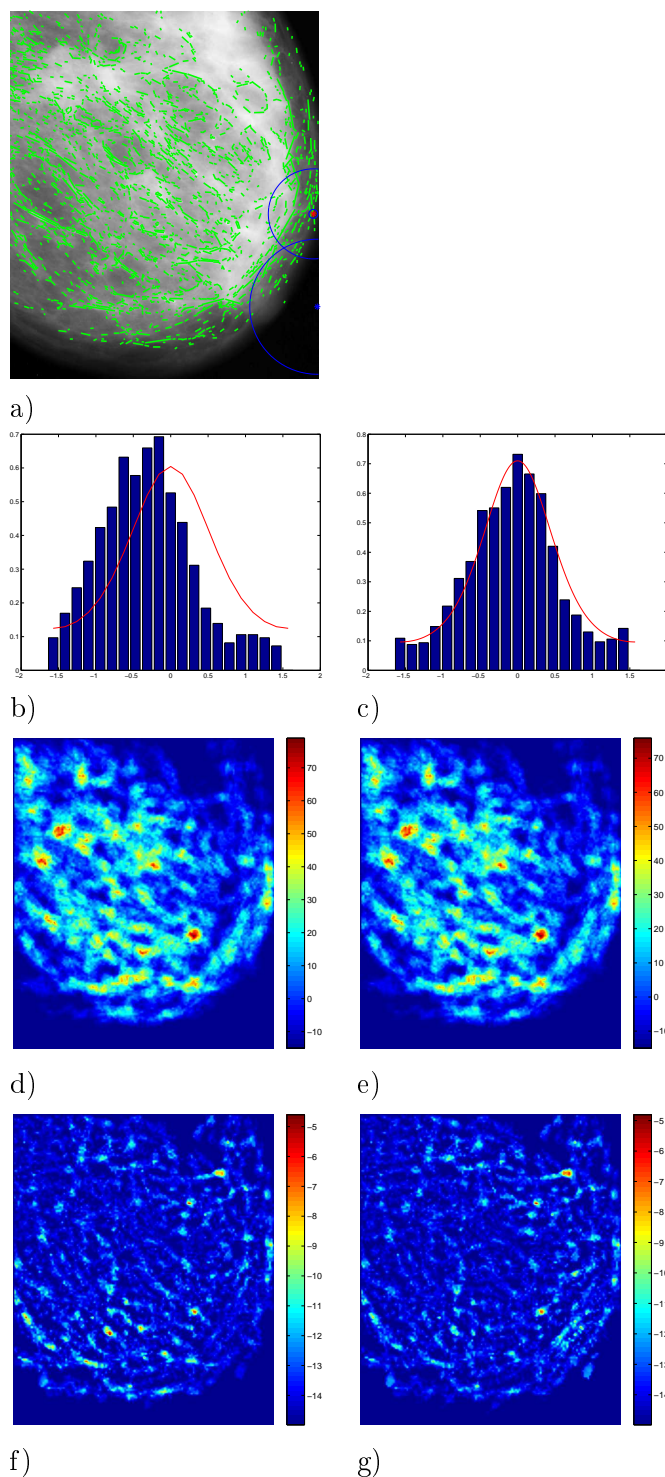


FIGURE 4.21 – a) l'image originale et ses 2105 segments. Les deux points M sélectionnés (minimisation du NFA en rouge, minimisation de $\sum_{n=1}^N \sin^2 \varphi_n(M)$ en bleu), les cercles ont un rayon $100p$ où p est le poids estimé par maximisation de la log-vraisemblance. b) et c) les histogrammes des angles φ_M pour les deux points M choisis ainsi que la densité estimée à partir de ces deux points M (b) point le plus significatif c) point minimisant $\sum_{n=1}^N \sin^2 \varphi_n(M)$). On voit clairement des modes, sur le deuxième histogramme celui-ci est centré, donc cet histogramme est plus proche du modèle de mélange. d), e), f), g) $-\log \text{NFA}$ par rapport au modèle estimé (d) et e) positions uniformes, f) et g) positions déterministes).

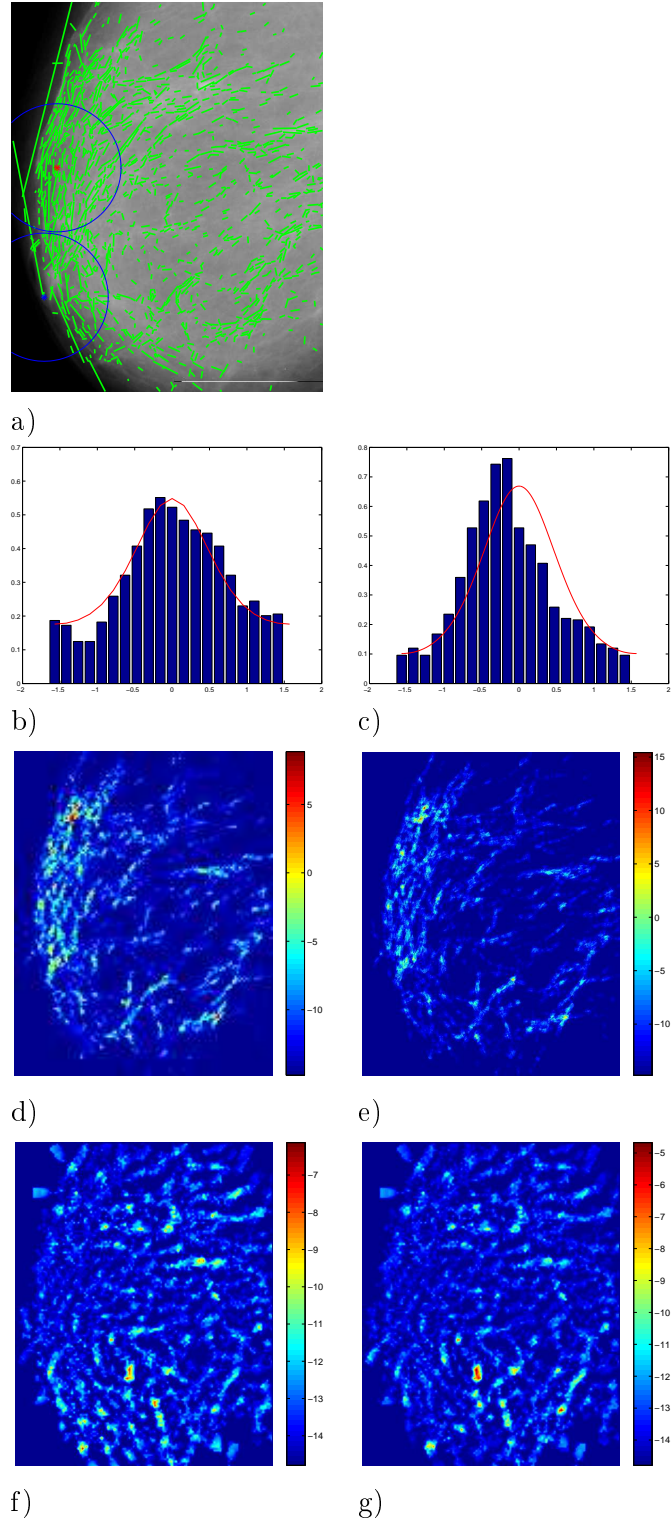


FIGURE 4.22 – a) l'image originale et ses 1328 segments. Les deux points M sélectionnés (minimisation du NFA en rouge, minimisation de $\sum_{n=1}^N \sin^2 \varphi_n(M)$ en bleu), les cercles ont un rayon $100p$ où p est le poids estimé par maximisation de la log-vraisemblance. b) et c) les histogrammes des angles φ_M pour les deux points M choisis ainsi que la densité estimée à partir de ces deux points M (b) point le plus significatif c) point minimisant $\sum_{n=1}^N \sin^2 \varphi_n(M)$). d), e), f), g) $-\log \text{NFA}$ par rapport au modèle estimé (d) et e) positions uniformes, f) et g) positions déterministes).

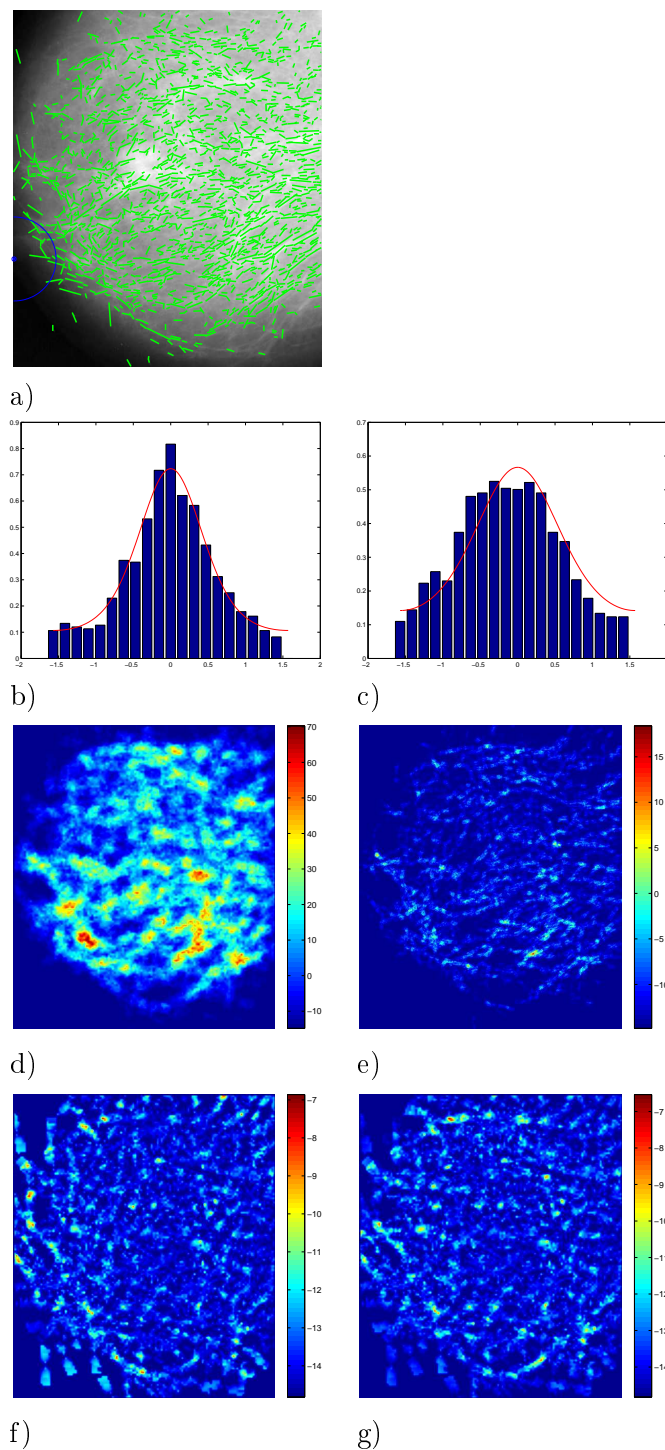


FIGURE 4.23 – a) l'image originale et ses 1855 segments. Le point M sélectionné par minimisation de $\sum_{n=1}^N \sin^2 \varphi_n(M)$, le point M le plus significatif est à l'extérieur de l'image, les cercles ont un rayon $100p$ où p est le poids estimé par maximisation de la log-vraisemblance. b) et c) les histogrammes des angles φ_M pour les deux points M choisis (b) point le plus significatif c) point minimisant $\sum_{n=1}^N \sin^2 \varphi_n(M)$. On a également tracé la densité estimée à partir de ces deux points. d), e), f), g) $-\log \text{NFA}$ par rapport au modèle estimé (d) et e) positions uniformes, f) et g) positions déterministes).

positions sont déterministes ce dernier exemple montre qu'il n'est pas très adapté à ce que l'on souhaite détecter. Il est conçu pour réagir aux configurations parfaitement radiales des segments, tandis que lorsqu'on choisit les positions uniformes on peut aussi détecter les couronnes où les segments ne sont pas uniformément répartis. En pratique la variabilité de forme des lésions stellaires (le centre n'est pas exactement rond, de même que sa périphérie) rend délicate leur détection contre les modèles supposant les positions déterministes.

4.3.4 Expériences sur des images naturelles

L'image de l'exemple 4.24 présente un point de fuite central, et de nombreux segments verticaux et horizontaux. Lorsqu'on cherche les convergences globales dans le plan de l'image, on détecte pour la plus petite échelle le point de fuite central. Cependant, il existe d'autres points de convergence plus significatifs pour les autres échelles de test. Le point de convergence sélectionné n'est donc pas le point de fuite central mais un point situé au croisement de plusieurs faisceaux de droites concourantes. On voit que l'approximation par le modèle de mélange est mauvaise : la densité de type (4.21) choisie n'est pas adaptée à l'histogramme des orientations $\varphi_n(M)$. Le poids du terme de convergence est $p = 0.08$, son paramètre $\kappa = 6.3$, ce qui lui donne peu d'influence finalement. Cette image naturelle ne se décrit pas bien par la forme de mélange proposée.

Dans l'exemple 4.25 on peut voir des convergences locales mais distinguer une convergence globale est difficile. Les convergences globales détectées sont surtout dues à des surdensités de segments. Le modèle paramétrique estimé n'est pas très pertinent, les valeurs des paramètres trouvées sont 0.94, qui laisse penser que le terme de convergence prédomine, et $\kappa = 0.2$ qui le rend en réalité très proche du terme uniforme. D'ailleurs, cela se voit sur l'histogramme, la densité estimée (représentée en rouge) est très aplatie, donc proche de la loi uniforme sur φ . Il y a une convergence locale qui est significative dans le cas uniforme et gaussien.

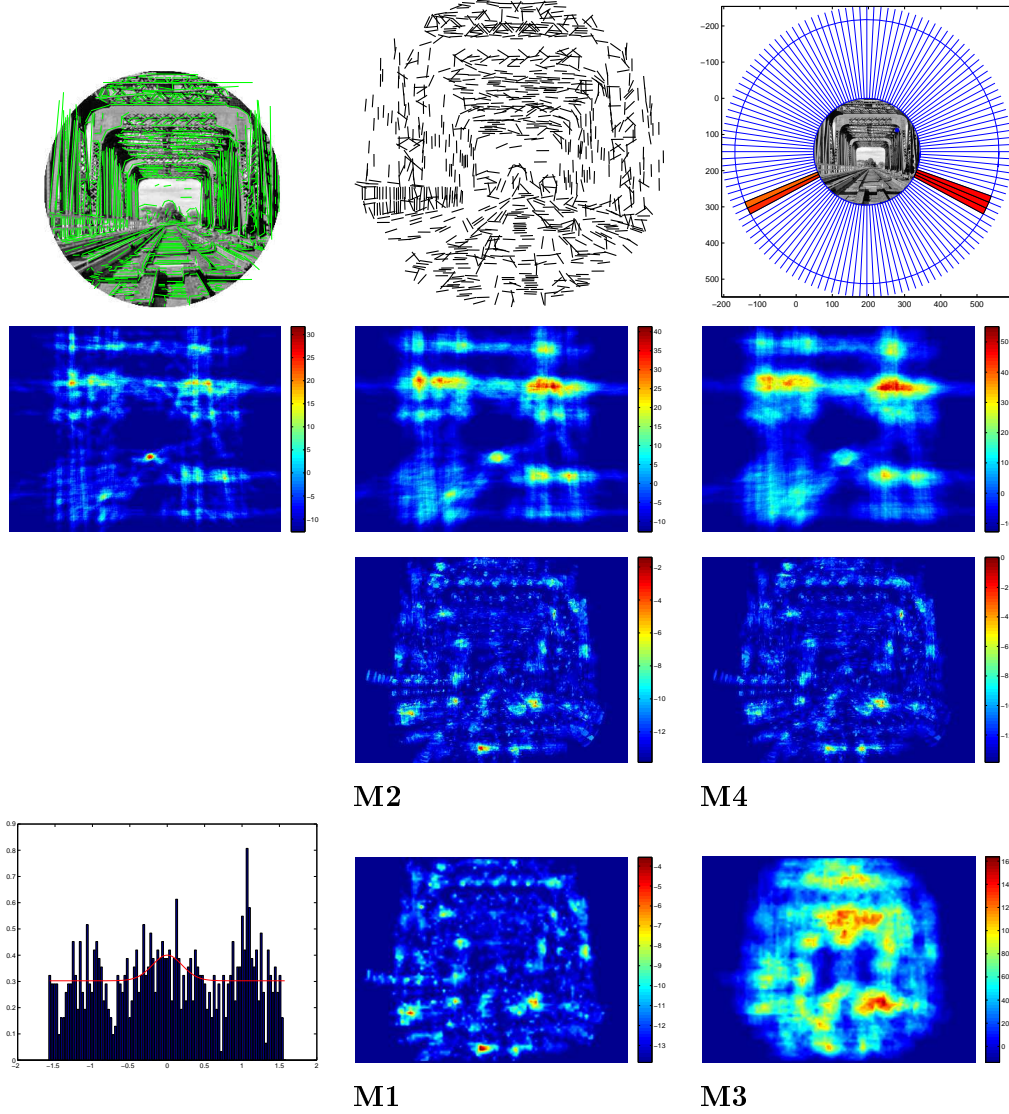


FIGURE 4.24 – Image naturelle avec $N = 986$ segments, de rayon $R_I = 147$. On peut distinguer trois convergences globales des droites de l'image : dans la direction verticale, dans la direction horizontale et vers le point de fuite central. Cependant le point le plus significatif contre le modèle uniforme sur les droites (testé pour les échelles $r = 4, 8, 12$) a pour coordonnées $(83, -59)$ et se trouve au croisement de plusieurs faisceaux de droites, ce n'est pas une vraie convergence globale (au sens des points de fuite). Deuxième ligne : $-\log \text{NFA}_1$ pour le modèle uniforme sur les droites, pour chaque échelle de test r . Pour la plus petite échelle le point de fuite central est le plus significatif. Troisième ligne : les convergences locales contre les modèles **M2** et **M4**. Dernière ligne l'histogramme de l'orientation $\varphi(M)$ par rapport au point M , et l'image de $-\log \text{NFA}$ contre **M1** et **M3**.

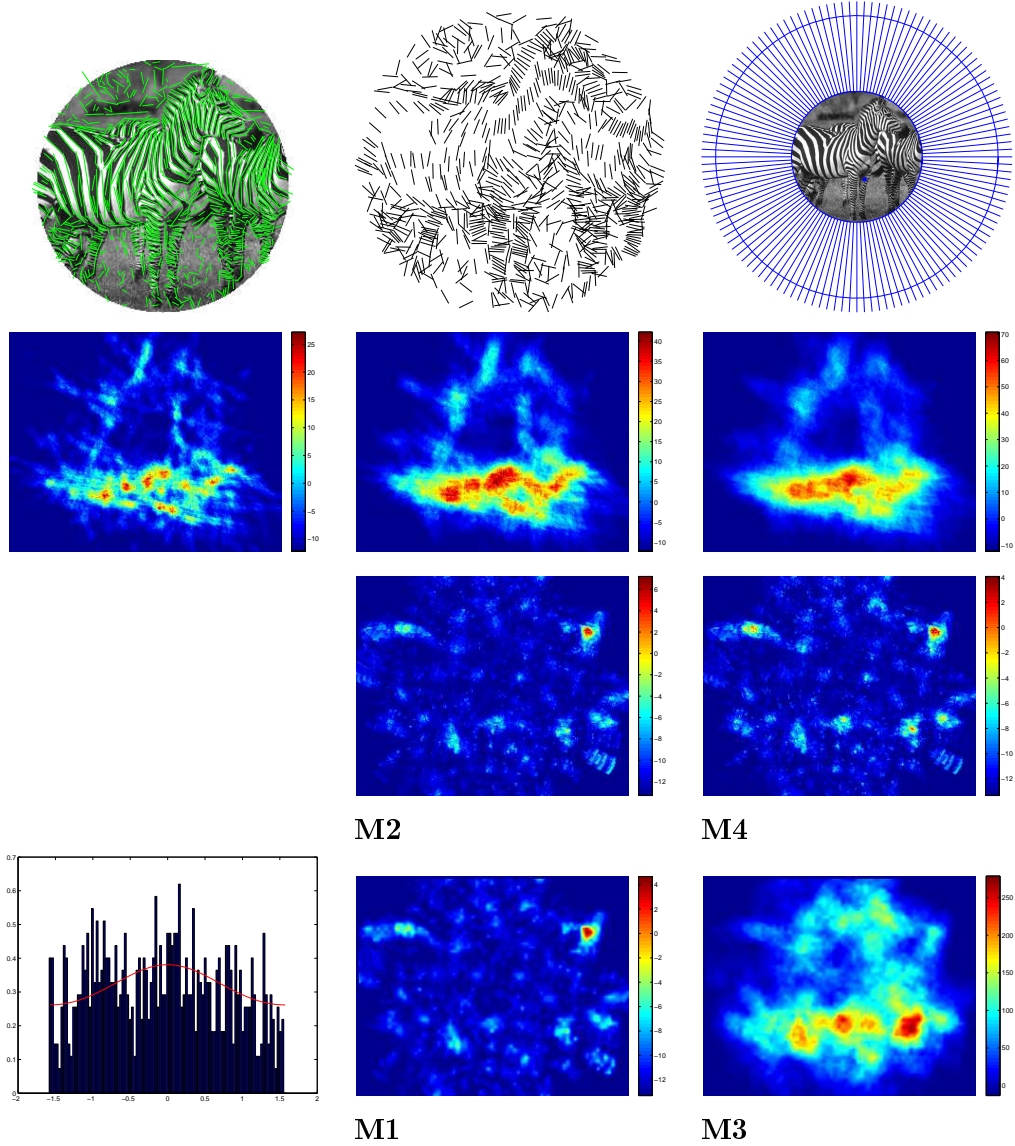


FIGURE 4.25 – Exemple d’une image naturelle. Première ligne : il y a 873 segments et le rayon du domaine de l’image est 116. Deuxième ligne : contre le modèle uniforme sur les droites de l’image (testé pour les échelles $r = 4, 8, 12$) le point M de coordonnées $(14, 40)$ est le plus significatif. Troisième ligne : contre les modèles **M2** et **M4** il y a quelques convergences locales, notamment autour de la tête du zèbre. Quatrième ligne : l’histogramme de l’orientation des segments par rapport au point M . Il n’y a pas de mode discernable, d’ailleurs la densité $f_{p,\kappa}$ estimée est proche de la loi uniforme, elle a pour paramètres $p = 0.94$ et $\kappa = 0.2$, les images $-\log \text{NFA}$ contre les modèles **M1** et **M3**.

Un autre nombre de fausses alarmes

Sommaire

5.1	Nombre de fausses alarmes	99
5.1.1	Calcul numérique du nombre de fausses alarmes sous le modèle uniforme	100
5.1.2	Calcul du nombre de fausses alarmes contre le modèle gaussien	101
5.2	Comparaison des nombres de fausses alarmes	104

Nous revoyons ici le cadre a contrario pour la détection des convergences locales et globales en définissant un nouveau nombre de fausses alarmes. Le critère que nous utilisons pour détecter une éventuelle convergence en M porte sur l'orientation des structures linéaires par rapport au point M . Si ce point est un point de convergence, alors en notant $\varphi_i(M)$ les angles des segments par rapport au point M , on doit observer de petites valeurs de $\sin^2 \varphi_i(M)$. Une façon de le vérifier est de définir en tout point M un nombre de fausses alarmes à partir de ces variables.

5.1 Nombre de fausses alarmes

Définition 5.1.1. *En tout point M d'une image on calcule $v(M) := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sin^2 \varphi_i(M)$ où $\varphi_i(M) \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ est l'angle entre le segment (s_1^i, s_2^i, θ^i) et la droite $(S_i M)$ défini par*

$$\varphi_i(M) = \theta_i - \arctan \frac{y_M - s_2^i}{s_1^i - x_M} \pmod{\pi}.$$

On associe alors le nombre

$$\text{NFA}_f^{\sin}(M) = N_T \mathbb{P}_f(V(M) \leq v(M)), \quad (5.1)$$

où $V(M)$ est la variable aléatoire (dépendante du point M a priori)

$V(M) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \sin^2 \tilde{\varphi}_i(M)$ où les $\tilde{\varphi}_i(M)$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant le modèle a contrario déterminé par la densité f sur les segments.

Ce nombre de fausses alarmes vérifie bien la propriété de majoration du nombre d'événements ε -significatifs.

La somme $v(M)$ porte sur tous les segments de l'image, de cette façon on détecte les convergences globales. Si on souhaite détecter les convergences locales on modifie l'expression du nombre de fausses alarmes selon la définition suivante.

Définition 5.1.2 (Critère local). *Pour tout point M on note \mathcal{V}_M un voisinage de M et on lui associe la somme*

$$v_{loc}(M) = \frac{1}{N_M} \sum_{i \in \{1, \dots, N\}, S_i \in \mathcal{V}_M} \sin^2 \varphi_i(M), \quad (5.2)$$

où $N_M = \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{\{S_i \in \mathcal{V}(M)\}}$ est le nombre de segments dans le voisinage \mathcal{V}_M de M . Le nombre de fausses alarmes local de M est alors défini par :

$$\text{NFA}_{loc,f}^{sin}(M) = N_T \mathbb{P}_f(V(M) \leq v_{loc}(M)), \quad (5.3)$$

où on a défini la variable aléatoire $V(M) = \frac{1}{N_M} \sum_{i=1}^{N_M} \sin^2 \tilde{\varphi}_i(M)$ définie à partir des variables $\tilde{\varphi}_i(M)$ indépendantes et identiquement distribuées selon le modèle a contrario f .

5.1.1 Calcul numérique du nombre de fausses alarmes sous le modèle uniforme

Proposition 5.1.1. *On suppose que les N segments (s_1^i, s_2^i, θ^i) d'une image sont indépendants et suivent la loi uniforme. Alors en tout point M les variables $\varphi_i(M) = \theta_i - \arctan \frac{y_M - s_2^i}{s_1^i - x_M} \pmod{\pi}$ suivent la loi uniforme sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ conditionnellement à (s_1^i, s_2^i) . De plus on a*

$$\mathbb{E}_1(\sin^2 \varphi_i(M)) = \frac{1}{2}, \quad (5.4)$$

et

$$\text{Var}_1(\sin^2 \varphi_i(M)) = \frac{1}{8}. \quad (5.5)$$

Démonstration. Soit θ une variable uniforme sur l'intervalle $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ et $(s_1, s_2) \sim \mathcal{U}_\Omega$.

Soit M un point de Ω et $\varphi = \theta - \arctan \frac{s_2 - y_M}{x_M - s_1} \pmod{\pi}$ la variable désignant l'angle entre le segment (s_1, s_2, θ) et la droite (MS) .

Conditionnellement au couple (s_1, s_2) la variable φ suit la loi uniforme. La densité de φ est alors la fonction définie sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$

$$\begin{aligned} f(\varphi) &= \int_{s_1, s_2} f(\varphi | s_1, s_2) f(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \\ &= \int_{s_1, s_2} \frac{1}{\pi} \frac{1}{\pi R_I^2} ds_1 ds_2 \\ &= \frac{1}{\pi}. \end{aligned}$$

Donc sous le modèle uniforme φ est uniforme. On en déduit l'espérance de $\sin^2 \varphi$.

$$\mathbb{E}_1 \sin^2 \varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^2 x \frac{dx}{\pi} = \frac{1}{2}.$$

De même pour le moment d'ordre 2 :

$$\mathbb{E}_1 \sin^4 \varphi = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^4 x \frac{dx}{\pi} = \frac{3}{8}.$$

$$\text{D'où } \text{Var}_1 \sin^2 \varphi = \mathbb{E}_1 \sin^4 \varphi - (\mathbb{E}_1 \sin^2 \varphi)^2 = \frac{1}{8}.$$

□

Comme les segments sont indépendants sous l'hypothèse de bruit, les variables $\sin^2 \varphi_i$ le sont aussi. On peut donc appliquer le théorème central limite à la variable $V(M)$ en tant que somme de variables indépendantes et identiquement distribuées, d'espérance et de variance finies. Pour calculer numériquement le nombre de fausses alarmes en tout point M on fait l'approximation $V(M) \sim \mathcal{N}(\mathbb{E}_1 \sin^2 \varphi_1, \frac{1}{N} \text{Var}_1 \sin^2 \varphi_1)$. La probabilité $\mathbb{P}_1(V(M) \leq v(M))$ s'exprime alors à l'aide de la fonction de répartition de la loi normale centrée réduite par :

$$\text{NFA}_1^{\text{sin}}(M) = N_T \mathbb{P}_1(V(M) \leq v(M)) \simeq N_T \Phi(\sqrt{8N}(v(M) - \frac{1}{2})). \quad (5.6)$$

Sous le modèle uniforme, la loi de $\varphi_i(M)$ est indépendante du point M .

5.1.2 Calcul du nombre de fausses alarmes contre le modèle gaussien

Comme dans le Chapitre 4 nous enrichissons le modèle a contrario et donnons l'expression du nombre de fausses alarmes dans le cas d'un modèle de mélange à deux termes, uniforme et gaussien.

Nous rappelons le modèle a contrario sur les segments de l'image : le point de convergence globale est noté M , l'orientation des segments par rapport à M est donnée par la variable $\varphi(M)$. On suppose que les positions de segments sont uniformes dans le domaine de l'image, et que l'orientation $\varphi(M)$ est indépendante de la position, distribuée selon la densité sur $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$:

$$f_{p,\kappa}(\varphi) = \frac{1-p}{\pi} + p \frac{e^{\kappa \cos(2\varphi)}}{\pi I_0(\kappa)}, \quad (5.7)$$

où p est le poids du terme de convergence, et κ le paramètre de la loi de Von Mises utilisée pour modéliser la convergence.

Soit Q un point du domaine de l'image donné par ses coordonnées (x_Q, y_Q) . On a alors les relations d'angles :

$$\theta = \varphi(M) + \arctan \frac{y_M - s_2}{s_1 - x_M} \pmod{\pi}, \quad (5.8)$$

$$\theta = \varphi(Q) + \arctan \frac{y_Q - s_2}{s_1 - x_Q} \pmod{\pi}. \quad (5.9)$$

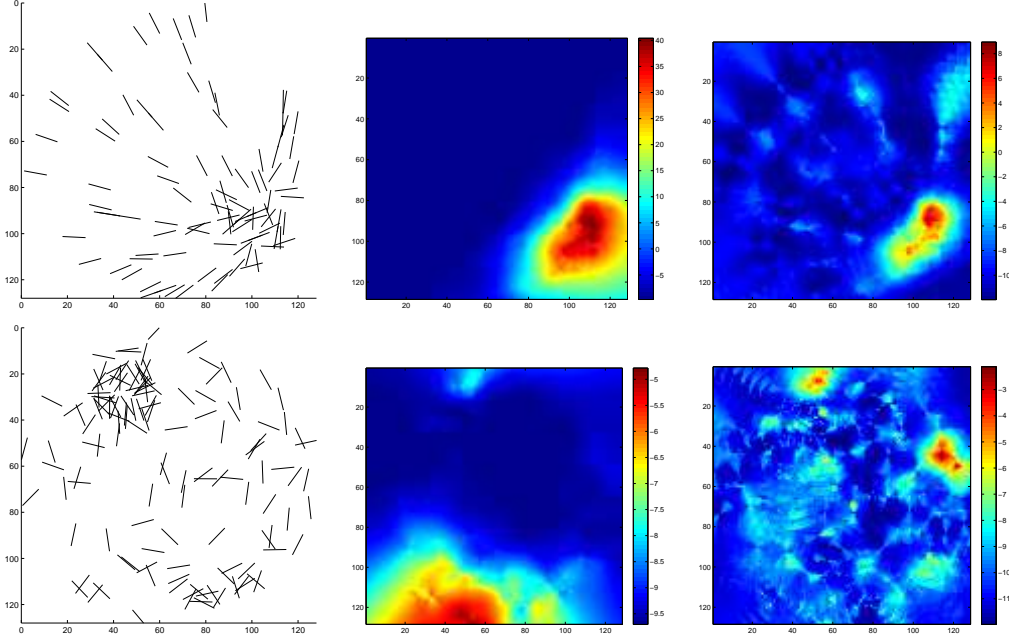


FIGURE 5.1 – Calcul du nombre de fausses alarmes NFA_1^{\sin} global et local contre le modèle uniforme sur les segments. Première ligne : segments simulés selon une loi gaussienne. Seconde ligne : segments uniformément distribués dans le domaine de l'image, avec une surdensité de segments localisée.

D'où

$$\varphi(Q) = \varphi(M) + \arctan \frac{y_M - s_2}{s_1 - x_M} - \arctan \frac{y_Q - s_2}{s_1 - x_Q} \pmod{\pi}, \quad (5.10)$$

dont on déduit l'égalité

$$\sin^2 \varphi(Q) = \sin^2 \left(\varphi(M) + \arctan \frac{y_M - s_2}{s_1 - x_M} - \arctan \frac{y_Q - s_2}{s_1 - x_Q} \right). \quad (5.11)$$

Cette égalité a été utilisée afin d'évaluer numériquement l'espérance et la variance de $\sin^2 \varphi(q)$ pour tout point Q sous le modèle gaussien. Ces estimations ont ensuite été utilisées pour calculer le nombre de fausses alarmes en tout point Q à l'aide de l'approximation gaussienne.

La Figure 5.2 montre les événements significatifs contre le nombre de fausses alarmes NFA_1^{\sin} sur des images naturelles ainsi que sur une mammographie, pour les convergences globales, et pour les convergences locales. On observe que la convergence globale la plus significative est souvent la même que lors du test contre le modèle uniforme sur les droites. De plus, la détection des convergences locales se fait ici sur plusieurs échelles : les voisinages considérés sont de rayons $r = 10, 20$ ou 30 . En tout point on donne le NFA_1^{\sin} minimal sur toutes les échelles. Sur la plupart des exemples la convergence locale la plus forte est aussi la convergence globale.

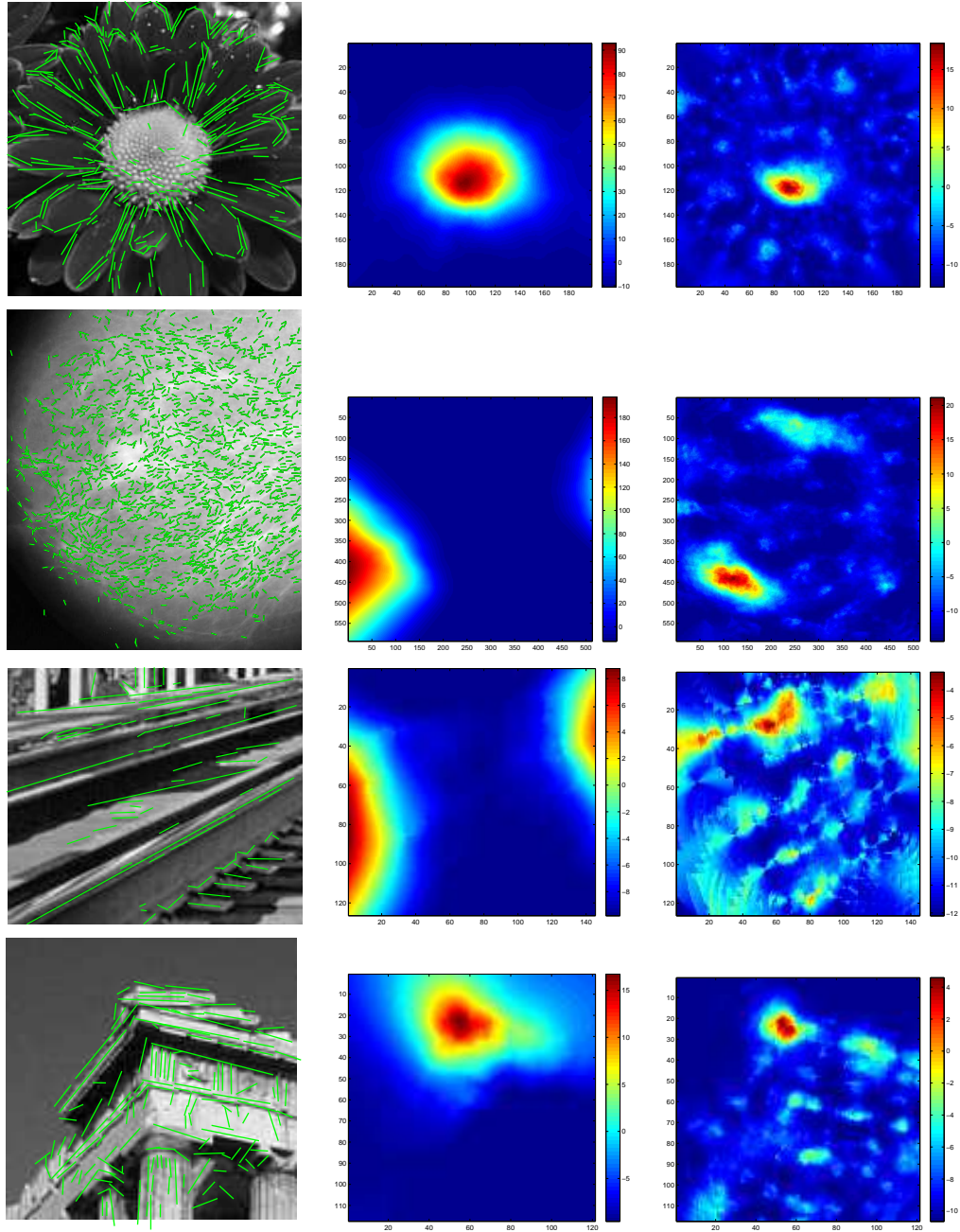


FIGURE 5.2 – Test du nouveau nombre de fausses alarmes (global et local) sur des images naturelles et sur une mammographie contre le modèle uniforme. Deuxième colonne $-\log \text{NFA}_1^{\text{sin}}$ calculé sur tous les segments de l'image. Troisième colonne : $-\log \text{NFA}_{\text{loc},1}^{\text{sin}}$ calculé en tout point Q sur les segments dans le voisinage de Q . Les convergences globales (événements significatifs pour $\text{NFA}_1^{\text{sin}}$) sont semblables à celles qu'on trouvait Chapitre 3 contre le modèle uniforme sur les droites. Il existe des similarités entre les images des deuxième et troisième colonne car le calcul du nombre de fausses alarmes local est conduit pour plusieurs échelles $r = 10, 20, 30$.

5.2 Comparaison des nombres de fausses alarmes

Nous avons comparé les différents nombres de fausses alarmes proposés dans ce manuscrit, sur des images naturelles et sur des mammographies. Pour la détection des convergences globales nous avons proposé les deux nombres de fausses alarmes

- $N_T \mathbb{P}(K(V) \geq k(V))$ où V est une région test et $k(V) = \sum_{n=1}^N \mathbb{1}_{\{D_{(\rho_n, \varphi_n)} \cap V \neq \emptyset\}}$ est le nombre de droites qui l'intersectent, N_T est le nombre de régions test.
- $N_T \mathbb{P}(V(Q) \leq v(Q))$ où Q est un point du domaine de l'image et où $v(Q) = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N \sin^2 \varphi_n(Q)$, N_T est le nombre de pixels dans l'image test.

Pour la détection des convergences locales nous avons comparé les nombres de fausses alarmes

- $N_T \mathbb{P}(K \geq k(\mathbf{x}, r, \alpha) | N = n(\mathbf{x}, r, \alpha))$ où (\mathbf{x}, r, α) sont les paramètres de la couronne test et où $n(\mathbf{x}, r, \alpha)$ et $k(\mathbf{x}, r, \alpha)$ sont respectivement le nombre de segments qui sont dans la couronne et le nombre de segments de la couronne orientés vers son disque intérieur,
- $N_T \mathbb{P}(V_{\text{loc}}(Q) \leq v_{\text{loc}}(Q))$ où on a défini en tout point Q une variable locale $v_{\text{loc}}(Q) = \frac{1}{\#\mathcal{N}(Q) \cap \mathcal{S}} \sum_{n=1}^N \sin^2(\varphi_n(Q)) \mathbb{1}_{\{(s_1^n, s_2^n) \in \mathcal{N}(Q)\}}$. N_T est le nombre de tests, égal ici au produit du nombre de pixels q par le nombre de rayons tests des voisinages $\mathcal{N}(Q)$.

Pour chaque exemple nous montrons

- l'image originale et ses segments,
- l'ensemble des droites supports des segments,
- l'image du logarithme du nombre de fausses alarmes $-\log \text{NFA}_1$ pour le modèle uniforme sur les droites, ainsi que le point le plus significatif.
- l'image de $-\log \text{NFA}_1^{\text{sin}}$ pour le modèle uniforme sur les segments ainsi que le point le plus significatif.
- $-\log \text{NFA}_f$ pour un mélange f estimé sur les segments,
- $-\log \text{NFA}_{\text{loc}, f}^{\text{sin}}$ pour le même mélange f mais avec le nombre de fausses alarmes calculé à partir de v_{loc} .

Dans l'exemple 5.3, les segments ont trois directions de fuites principales, une verticale et deux correspondant à l'horizontale. Lorsqu'on cherche les convergences globales contre le modèle uniforme sur les droites en utilisant le nombre de fausses alarmes $N_T \mathbb{P}(K \geq K(V))$, la région la plus significative correspond à la direction de fuite verticale. C'est aussi la direction verticale qui est la plus significative avec le nombre de fausses alarmes NFA_1 . L'histogramme de l'angle $\varphi(M)$ des segments par rapport au point le plus significatif montre trois modes, le mode principal correspond aux segments verticaux et la densité $f_{p, \kappa}$ estimée correspond à ce mode. Les deux autres modes correspondent aux deux directions de fuite horizontales. Enfin quand on cherche les convergences locales contre le modèle de mélange estimé, en supposant les positions uniformes, on trouve les croisements de segments (par exemple sur les fenêtres de chaque façade). Le constat est similaire si on utilise le nombre de fausses alarmes $-\log \text{NFA}_{\text{loc}, f, p, \kappa}^{\text{sin}}$, alors qu'il n'y a pas d'événements significatifs contre le modèle **M1** (positions déterministes).

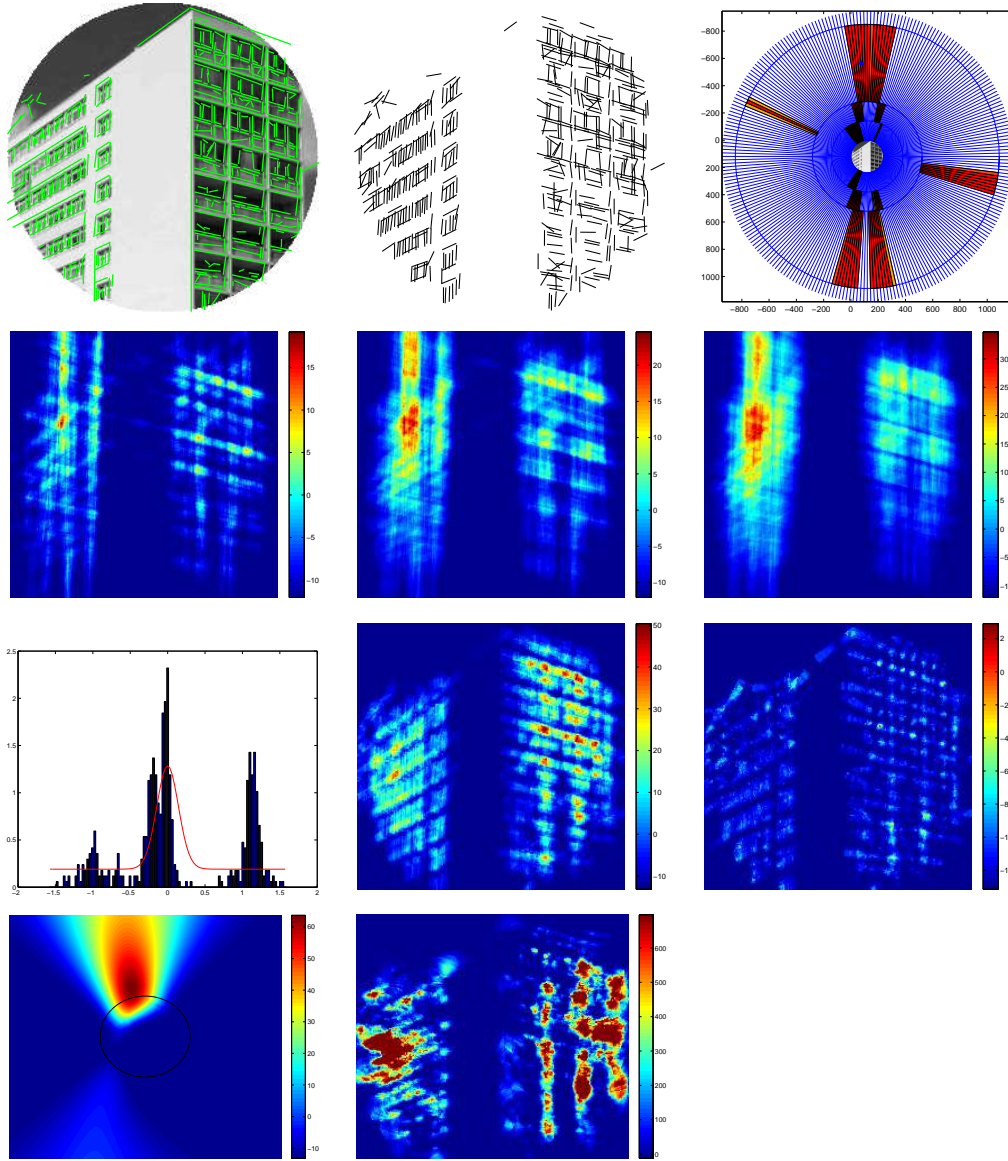


FIGURE 5.3 – Exemple d’une image naturelle. De gauche à droite, et de haut en bas : il y a 535 segments. Le domaine de l’image est un disque de rayon 119, $-\log \text{NFA}_1$ pour toute région extérieure (échelle $r = 4$) avec le point M le plus significatif qui correspond au faisceau de droites verticales. Deuxième ligne : $-\log \text{NFA}_1$ pour toute région intérieure, pour toutes les échelles $r = 4, 8, 12$. Troisième ligne : l’histogramme des angles $\varphi_i(M)$ par rapport au point M , avec la densité $f_{p,\kappa}$ estimée ($p = 0.4$ et $\kappa = 12$), $-\log \text{NFA}_{f_{p,\kappa}}$ local en tout point Q du domaine de l’image, en supposant les positions des segments uniformes, ou connues. Dernière ligne : $-\log \text{NFA}_1^{\sin}$ pour les convergences globales et $-\log \text{NFA}_{\text{loc}, f_{p,\kappa}}^{\sin}$ pour les convergences locales, le domaine de l’image est représenté par le cercle noir.

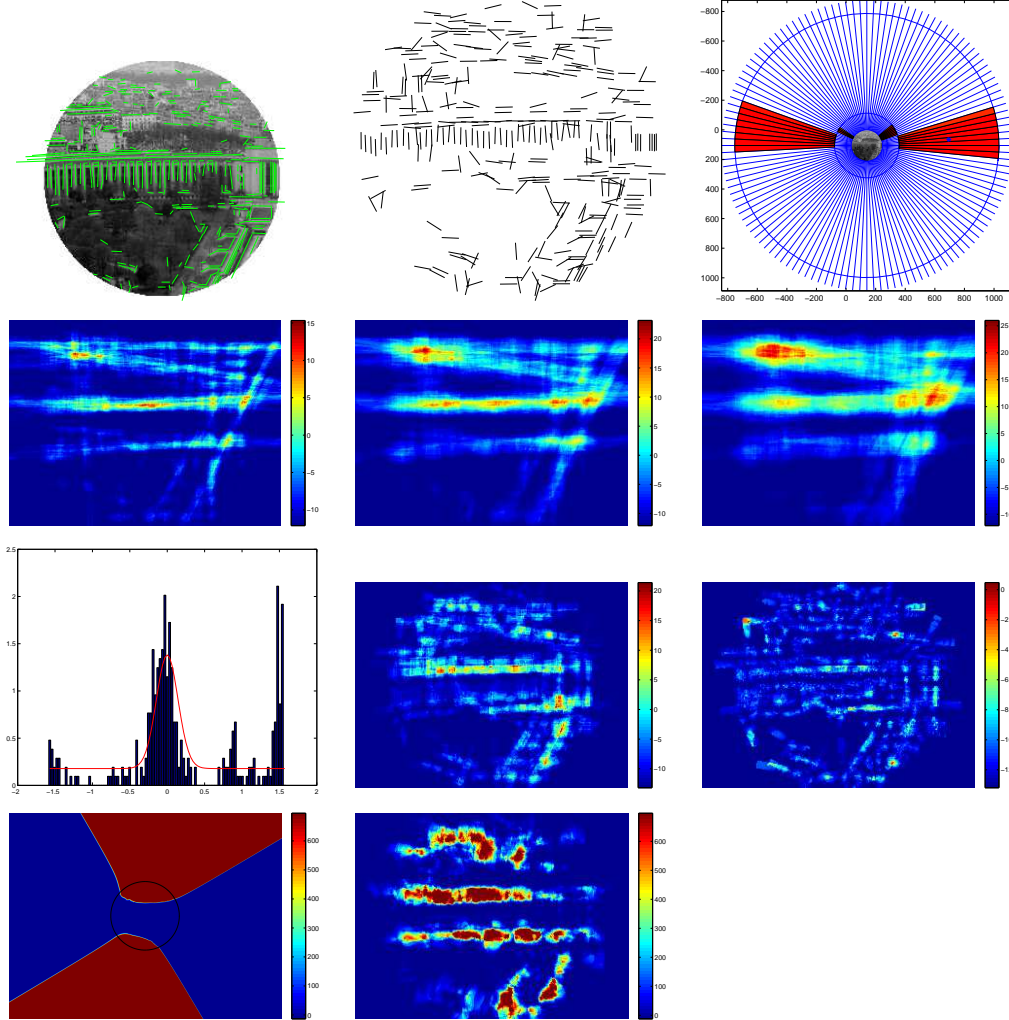


FIGURE 5.4 – Exemple d’une image naturelle. De gauche à droite, et de haut en bas : il y a 332 segments. Le domaine de l’image est un disque de rayon 106, $-\log NFA_1$ pour toute région extérieure (échelle $r = 4$) avec le point M le plus significatif qui correspond au faisceau de droites verticales. Deuxième ligne : $-\log NFA_1$ pour toute région intérieure, pour toutes les échelles $r = 4, 8, 12$. Troisième ligne : l’histogramme des angles $\varphi_i(M)$ par rapport au point M , avec la densité $f_{p,\kappa}$ estimée ($p = 0.44$ et $\kappa = 12$), $-\log NFA_{f_{p,\kappa}}$ local en tout point Q du domaine de l’image, en supposant les positions des segments uniformes, ou connues. Dernière ligne : $-\log NFA_1^{\sin}$ défini à partir des angles $\sin^2 \varphi_i(M)$ pour les convergences globales et $-\log NFA_{loc,f_{p,\kappa}}^{\sin}$ pour les convergences locales, le domaine de l’image est représenté par le cercle noir.

Figure 5.4 la plupart des segments sont verticaux, ou horizontaux. La région la plus significative contre le modèle uniforme sur les droites correspond d'ailleurs à la direction de fuite horizontale. Quand on regarde l'histogramme de l'orientation des segments par rapport à la direction de convergence principale on voit deux modes : l'un centré en 0 qui correspond aux segments convergeant vers le point M , et l'autre autour de $\frac{\pi}{2}$ (ou $-\frac{\pi}{2}$) qui correspond ici aux segments verticaux. Comme dans l'exemple précédent les zones significatives intérieures contre le modèle uniforme correspondent souvent à des croisements de plusieurs faisceaux de droites parallèles. Ici elles ne correspondent pas à des directions de fuite. Sur cet exemple le lien entre les détections des régions de convergence des droites (Chapitre 3) et les détections de convergences globales avec le nombre de fausses alarmes de ce chapitre, n'est pas évident. En effet il semble qu'avec le nombre de fausses alarmes NFA^{sin} le point de convergence globale soit au-dessus plutôt qu'à droite de l'image. En revanche, lorsqu'on teste contre le modèle de mélange estimé sur l'orientation $\varphi(M)$ des segments, on retrouve des similitudes entre le nombre de fausses alarmes du Chapitre 4 et $\text{NFA}_{\text{loc},f_p,\kappa}^{\text{sin}}$.

Conclusions et perspectives

Nous avons proposé un cadre *a contrario* pour la détection des convergences de structures linéaires dans les images. Pour la détection des convergences globales telles que les points de fuite dans les images naturelles ou pour détecter l'orientation normale des spicules dans les mammographies, nous avons considéré les droites support des segments détectés dans les images par le Line Segment Detector. Nous avons développé la méthodologie *a contrario* avec des modèles de bruits anisotropes définis à partir de modèles de mélanges paramétriques. Ces modèles ont été définis pour tenir compte du fait qu'une partie des droites sont naturellement convergentes vers un point du plan de l'image. Le terme décrivant cette convergence a été construit à partir de l'idée que la distance des droites convergeant vers le point M au point M suit une loi normale. La variance de la loi normale utilisée est directement liée à la précision de cette convergence normale.

Concernant les convergences locales dans les images, nous avons considéré les segments de l'image comme objets élémentaires pour la détection *a contrario*. Sur ces structures élémentaires les possibilités pour définir le nombre de fausses alarmes ont été nombreuses. Nous avons modélisé les convergences locales par des couronnes $\mathcal{C}(x, r, \alpha)$ et compté pour chacune d'entre elles le nombre $N(x, r, \alpha)$ de segments qu'elles contenaient, ainsi que le nombre $K(x, r, \alpha)$ de segments convergeant vers leur centre. Nous avons proposé plusieurs nombres de fausses alarmes construits à partir de ces deux variables. La comparaison des nombres de fausses alarmes $N_T \mathbb{P}(K \geq K(x, r, \alpha) | N = N(x, r, \alpha))$ et $N_T \mathbb{P}(K \geq K(x, r, \alpha))$ a montré que sous réserve que les segments de l'image soient suffisamment nombreux et uniformément répartis, il y aurait plus d'événements significatifs avec la première expression du nombre de fausses alarmes. Nous avons aussi montré que l'expression $\mathbb{P}(K \geq K(x, r, \alpha), N \geq N(x, r, \alpha))$ ne vérifiait pas la propriété de majoration du nombre d'événements significatifs et ne définissait donc pas un nombre de fausses alarmes, mais aussi qu'on obtenait une autre majoration du nombre d'événements significatifs pour cette expression.

L'étude des convergences de segments dans le cadre *a contrario* offre de nombreuses possibilités de définition du modèle *a contrario*. On a utilisé deux familles de modèles *a contrario* : ceux qui supposent les positions des segments uniformes dans le disque image et ceux qui considèrent ces positions connues et ne portent que sur l'orientation des segments. Afin de détecter des convergences locales dans les mammographies nous avons de nouveau défini des modèles anisotropes par des modèles de mélanges à deux termes dont l'un tient compte d'une convergence globale et l'autre est le terme uniforme. Ces modèles anisotropes ne portent que sur

l'orientation des segments et utilisent la loi de Von Mises, analogue de la loi normale sur l'intervalle $[0, \pi[$.

Pour la détection des convergences globales et locales nous avons donc enrichi le modèle a contrario en ajoutant au modèle uniforme un terme tenant compte d'une convergence principale d'une partie des structures linéaires vers un point du plan de l'image. Plusieurs méthodes de sélection de ce point ont été proposées. Parmi elles, le choix du point le plus significatif contre le modèle uniforme portant sur les droites s'avère efficace. Elle fait d'ailleurs sens : si une convergence globale des structures linéaires est présente, elle doit être significative contre le modèle uniforme. Ces modèles sont paramétriques et nous avons proposé de les estimer par maximum de vraisemblance. Cette approche peut être hiérarchique : on peut envisager de la poursuivre en ajoutant progressivement des termes de convergence de la même forme au modèle de bruit. A chaque étape le nouveau point de convergence que l'on ajoute peut être défini comme le point le plus significatif contre le modèle de bruit courant, puisqu'il signifie que la convergence des droites en ce point n'est pas prise en compte par le modèle. Pour estimer le poids du nouveau terme du mélange ainsi que son paramètre σ ou κ selon que l'on utilise la loi gaussienne sur les droites ou la loi de Von Mises sur l'orientation des segments, la maximisation de la log-vraisemblance peut être envisagée. Afin de garantir la non significativité contre le nouveau modèle des points de convergence déjà ajoutés au modèle nous proposons de ne diminuer que le poids du terme uniforme à chaque ajout d'un nouveau point. Ce procédé d'agrégation de termes au mélange peut comporter un nombre fixe d'étapes si on souhaite un modèle avec un nombre de termes de convergences déterminé. Plus généralement, on peut envisager de le poursuivre tant que des points sont significatifs contre le modèle de bruit courant, ce qui pose la question théorique de sa terminaison. Etant donné une image et ses structures linéaires, peut-on trouver un modèle de bruit paramétrique comprenant un terme uniforme et un nombre fini de termes de convergences tel que la méthode de détection a contrario contre ce modèle ne donne aucun événement significatif ?

Tous les modèles a contrario que nous avons utilisés supposent l'indépendance des segments de l'image. Cela présente l'avantage de rendre le calcul de la probabilité d'apparition de chaque observation aisé. Cependant cette hypothèse est visiblement réductrice. En effet sur les mammographies on peut voir que les spicules s'organisent en longues chaînes normalement convergentes. Les orientations de deux segments voisins sont donc fortement corrélées. Dans les images naturelles ce phénomène s'observe également, en particulier si celles-ci contiennent des bords, le LSD détecte en général plusieurs petits segments sur chaque bord. La relaxation de l'hypothèse d'indépendance des structures linéaires, en introduisant par exemple de la corrélation entre des segments voisins est donc une perspective de travail intéressante qui s'inscrit dans la continuité de celui présenté ici.

Nous avons développé la méthodologie a contrario dans un cadre anisotrope, enrichi par rapport au modèle uniforme, mais en se restreignant à une forme de modèle paramétrique. Or le champ des modèles a contrario que l'on peut envisager est bien plus vaste. Sans se restreindre à une certaine forme de modèle paramétrique

on peut se demander quelles lois a contrario sur l'ensemble des structures observées faut-il prendre pour ne détecter aucun événement significatif ? Parmi les lois qui ne donnent aucun événement significatif quelle est la loi la plus aléatoire possible (au sens de l'entropie) ? A priori la loi estimée ne rendra pas les structures observées indépendantes. Existe-t-il des lois supposant les structures linéaires indépendantes telles qu'il n'y ait aucun événement significatif contre elles ? A nouveau, quelle est la forme de la loi d'entropie maximale qui suppose les segments (ou les droites) indépendants et qui ne donne aucun événement significatif ? Toutes les lois répondant à ces questions donnent-elles des échantillons semblables à celui observé dans l'image ? Les questions de l'existence d'une loi la plus aléatoire possible telle qu'il n'y ait aucun événement significatif dans une image donnée, ou de la loi telle qu'un échantillon de cette loi donne exactement les mêmes détections qu'une image donnée sont abordées en détail dans la prépublication [9].

Le travail développé dans ce manuscrit est un travail théorique préliminaire à la détection effective des lésions stellaires dans les mammographies. En effet plusieurs problèmes pratiques se posent concernant la mise en place d'une chaîne de détection des lésions stellaires. Le choix et la détection des segments élémentaires en est un. On a vu que l'on peut utiliser le Line Segment Detector afin de détecter les spicules d'une mammographie. Cependant la texture d'une mammographie, la qualité des images font que certains spicules ne sont pas détectés, et que certains segments ne représentent pas des spicules. La caractérisation des lésions stellaires ne se limite pas au seul motif de convergence locale des spicules. Le centre de la lésion est à prendre en compte : il est dense et son contour est spiculé. La méthode de détection des lésions stellaires doit donc détecter les centres denses et les motifs stellaires et ensuite agréger les résultats de ces deux types de détection. Enfin la procédure doit être évaluée. Il faut pour cela disposer d'une base de mammographies interprétées par des radiologues.

Bibliographie

- [1] A. Almansa, A. Desolneux, and S. Vamech. Vanishing point detection without any a priori information. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 25(4) :502–507, 2003.
- [2] J. Bonwein and J. Vanderweeff. *Convex functions : constructions, characterizations and counterexamples*. Cambridge University Press, 2010.
- [3] J. Bornefalk. Use of quadrature filters for detection of stellate lesions in mammograms. pages 649–658, 2005.
- [4] F. Cao. Good continuations in digital image level lines. In *Computer Vision, 2003. Proceedings. Ninth IEEE International Conference on*, pages 440–448, 2003.
- [5] F. Cao. Application of the gestalt principles to the detection of good continuations and corners in image level lines. *Computing and Visualization in Science*, 7(1) :3–13, 2004.
- [6] F. Cao, P. Musé, and F. Sur. Extracting meaningful curves from images. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 22(2) :159–181, 2005.
- [7] V. Caselles, B. Coll, and J. M Morel. Junction detection and filtering : A morphological approach. In *Image Processing, 1996. Proceedings., International Conference on*, volume 1, pages 493–496, 1996.
- [8] J. Delon, A. Desolneux, J. L Lisani, and A. B Petro. A nonparametric approach for histogram segmentation. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 16(1) :253–261, 2007.
- [9] A. Desolneux. When the a-contrario approach becomes generative. preprint.
- [10] A. Desolneux and F. Doré. Un cadre a contrario anisotrope pour la détection de convergences de structures linéaires dans les images. In *Actes du GRETSI, Brest*, 2013.
- [11] A. Desolneux and F. Doré. An anisotropic framework for the detection of points of convergences in images : application to the detection of stellate lesions in mammograms. en préparation.
- [12] A. Desolneux, S. Ladjal, L. Moisan, and J. M Morel. Dequantizing image orientation. *Image Processing, IEEE Transactions on*, 11(10) :1129–1140, 2002.
- [13] A. Desolneux, L. Moisan, and J. M Morel. Edge detection by helmholtz principle. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 25(4) :271–284, 2000.
- [14] A. Desolneux, L. Moisan, and J. M Morel. A grouping principle and four applications. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 25(4) :508–513, 2003.
- [15] A. Desolneux, L. Moisan, and J. M Morel. Maximal meaningful events and applications to image analysis. *The Annals of Statistics*, 31(6) :1822–1851, 2003.

- [16] A. Desolneux, L. Moisan, and J.M. Morel. *From Gestalt theory to image analysis : a probabilistic approach*. 2007.
- [17] J. Dieudonné. *Calcul infinitésimal*. Hermann, 1980.
- [18] M. Dimiccoli and P. Salembier. Exploiting t-junctions for depth segregation in single images. In *Acoustics, Speech and Signal Processing, 2009. ICASSP 2009. IEEE International Conference on*, pages 1229–1232, 2009.
- [19] A. R. Dominguez and A. K. Nandi. Toward breast cancer diagnosis based on automated segmentation of masses in mammograms. *Pattern Recognition*, 42(6) :1138–1148, 2009.
- [20] M. A Fischler and R. C Bolles. Random sample consensus : a paradigm for model fitting with applications to image analysis and automated cartography. *Communications of the ACM*, 24(6) :381–395, 1981.
- [21] R. Grompone von Gioi, J. Jakubowicz, J. M Morel, and G. Randall. Lsd : A fast line segment detector with a false detection control. *Pattern Analysis and Machine Intelligence, IEEE Transactions on*, 32(4) :722–732, 2010.
- [22] B. Grosjean and L. Moisan. A-contrario detectability of spots in textured backgrounds. *Journal of Mathematical Imaging and Vision*, 33(3) :313–337, 2009.
- [23] B. Grosjean, S. Muller, and H. Souchay. Lesion detection using an a-contrario detector in simulated digital mammograms. In *Proc. of SPIE Vol*, volume 6146, 2006.
- [24] B. Grosjean, S. Muller, and H. Souchay. Tools and methods for exposure control optimization in digital mammography in presence of texture. In *Proc. of SPIE Vol*, volume 6515, 2007.
- [25] Makita T. Matsubara T. Fujita H. Inenaga Y. Endo T. Hara, T. and T. Iwase. Automated detection method for architectural distortion with spiculation based on distribution assessment of mammary gland on mammogram. In *International Workshop on Digital Mammography (IWDM)*, pages 370–375, 2006.
- [26] J. Huang and D. Mumford. Statistics of natural images and models. In *Computer Vision and Pattern Recognition, 1999. IEEE Computer Society Conference on.*, volume 1, 1999.
- [27] T. Ichikawa, T. Matsubara, T. Hara, H. Fujita, T. Endo, and T. Iwase. Automated detection method for architectural distortion areas on mammograms based on morphological processing and surface analysis. In *Proc. of SPIE Vol*, volume 5370, page 921, 2004.
- [28] N. Karssemeijer and G. M te Brake. Detection of stellate distortions in mammograms. *Medical Imaging, IEEE Transactions on*, 15(5) :611–619, 1996.
- [29] Pruneda J. Bourland P. Kegelmeyer, W. et al. Computer-aided mammographic screening for spiculated lesions. *Radiology*, 191 :331–337, 1994.
- [30] H. Kim and W. Kim. Automatic detection of spiculated masses using fractal analysis in digital mammography. *Computer Analysis of Images and Patterns (CAIP)*, pages 256–263, 2005.

- [31] S. K. Kinoshita, P. M. Azevedo-Marques, R. R. Pereira, J. A.H Rodrigues, and R. M. Rangayyan. Radon-domain detection of the nipple and the pectoral muscle in mammograms. *Journal of Digital Imaging*, 21(1) :37–49, 2008.
- [32] A. B Lee, K. S Pedersen, and D. Mumford. The nonlinear statistics of high-contrast patches in natural images. *International Journal of Computer Vision*, 54(1) :83–103, 2003.
- [33] S. Liu, C. Babbs, and E. Delph. Multiresolution detection of spiculated lesions in digital mammograms. *IEEE Transactions on Medical Imaging*, 10(6) :874–884, 2001.
- [34] Q. T Luong and O. D Faugeras. The fundamental matrix : Theory, algorithms, and stability analysis. *International Journal of Computer Vision*, 17(1) :43–75, 1996.
- [35] T. Matsubara, D. Fukuoka, N. Yagi, T. Hara, H. Fujita, Y. Inenaga, S. Kasai, A. Kano, T. Endo, and T. Iwase. Detection method for architectural distortion based on analysis of structure of mammary gland on mammograms. In *International Congress Series*, volume 1281, pages 1036–1040, 2005.
- [36] T. Matsubara, T. Ichikawa, T. Hara, H. Fujita, S. Kasai, T. Endo, and T. Iwase. Automated detection methods for architectural distortions around skinline and within mammary gland on mammograms. In *International Congress Series*, volume 1256, pages 950–955, 2003.
- [37] A. J Mendez, P. G Tahoces, M. J Lado, M. Souto, J. L Correa, and J. J Vidal. Automatic detection of breast border and nipple in digital mammograms. *Computer methods and programs in biomedicine*, 49(3) :253–262, 1996.
- [38] L. Moisan and B. Stival. A probabilistic criterion to detect rigid point matches between two images and estimate the fundamental matrix. *International Journal of Computer Vision*, 57(3) :201–218, 2004.
- [39] M. Nemoto, S. Honmura, A. Shimizu, D. Furukawa, H. Kobatake, and S. Nawano. A pilot study of architectural distortion detection in mammograms based on characteristics of line shadows. *International journal of computer assisted radiology and surgery*, 4(1) :27–36, 2009.
- [40] S.L. Ng and W.F. Bischof. Automated detection and classification of breast tumors. *Computers and Biomedical Research*, 25 :218–237, 1992.
- [41] G. Palma. *Détection automatique des opacités en tomosynthèse numérique du sein*. PhD thesis, Telecom Paris Tech, 2010.
- [42] G. Palma, I. Bloch, and S. Muller. Spiculated lesions and architectural distortions detection in digital breast tomosynthesis datasets. In *International Workshop on Digital Mammography (IWDM)*, Girona, Spain, 2010.
- [43] G. Palma, S. Muller, I. Bloch, and R. Iordache. Fast detection of convergences areas in digital breast tomosynthesis. In *IEEE International Symposium on Biomedical Imaging (ISBI)*, pages 847–850, 2009.

- [44] G. Peters, S. Muller, and B. Grosjean. A hybrid active contour model for mass detection in digital breast tomosynthesis. In *Proc. of SPIE Vol*, volume 6514, 2007.
- [45] R. M Rangayyan and F. J Ayres. Gabor filters and phase portraits for the detection of architectural distortion in mammograms. *Medical and Biological Engineering and Computing*, 44(10) :883–894, 2006.
- [46] D. L Ruderman. Origins of scaling in natural images. *Vision research*, 37(23) :3385–3398, 1997.
- [47] D. L Ruderman and W. Bialek. Statistics of natural images : Scaling in the woods. *Physical Review Letters*, 73(6) :814–817, 1994.
- [48] J. Salvi, X. Armangue, et al. A survey addressing the fundamental matrix estimation problem. In *Image Processing, 2001. Proceedings. 2001 International Conference on*, volume 2, pages 209–212, 2001.
- [49] M. P Sampat and A. C Bovik. Detection of spiculated lesions in mammograms. In *Engineering in Medicine and Biology Society, 2003. Proceedings of the 25th Annual International Conference of the IEEE*, volume 1, pages 810–813, 2003.
- [50] Luis Antonio Santalo. *Integral Geometry and Geometric Probability*. Cambridge University Press, October 2004.
- [51] G.S. Xia, J. Delon, and Y. Gousseau. Accurate junction detection and characterization in natural images. *International Journal of Computer Vision*, 106(1) :31–56, 2014.
- [52] R. Zwiggelaar, T. C. Parr, J.E. Schumm, I. W. Hutt, C. J. Taylor, S. M. Astley, and C. R. M. Boggis. Model-based detection of spiculated lesions in mammograms. *Medical Image Analysis*, 3(1) :39–62, 1999.

Résumé : Cette thèse traite de la détection de zones de convergence dans une image, dans un cadre a contrario. C'est un travail théorique préliminaire qui explore différentes altérations du cadre a contrario. Elle a pour application dans le domaine médical la détection des lésions stellaires dans les mammographies, responsables de nombreux cancers du sein et qui se matérialisent par un centre intense vers lequel convergent les spicules, structures linéaires normalement présents dans le sein.

Les lésions stellaires et distorsions architecturales ont suscité de nombreux travaux. La plupart des méthodes de détection sont basées sur l'extraction de caractéristiques locales de l'image (orientation du gradient, orientation des pixels, variance de l'histogramme de l'orientation...) puis utilisent une méthode de classification pour attribuer à chaque pixel une probabilité d'appartenir à une lésion stellaire. Ces méthodes nécessitent souvent l'utilisation de filtres en pré-traitement et en post-traitement afin de réduire le bruit, ou de seuiller les résultats finaux.

La méthodologie a contrario offre un nouveau cadre pour la détection de structures dans les images. Elle s'appuie sur la définition d'un modèle de bruit, et sur une mesure de l'écart des observations à ce modèle. Le modèle porte sur des structures élémentaires et est souvent choisi "uniforme" : c'est-à-dire que les structures sont supposées suivre la loi uniforme et indépendantes. Or dans les mammographies on observe que les spicules ont une orientation privilégiée, et ne sont pas uniformément distribuées.

Nous proposons l'utilisation de la méthode a contrario dans un cadre anisotrope pour mieux tenir compte de la distribution normale des spicules dans une mammographie. Les modèles anisotropes proposés modélisent le fait qu'une partie des structures linéaires est normalement convergentes vers un point commun. Ils portent soit sur les droites de l'image quand il s'agit de détecter les convergences globales, soit sur les segments quand on cherche les convergences locales dans une image. Concernant la détection des convergences locales, le cadre a contrario offre de nombreuses possibilités : sur le choix du nombre de fausses alarmes ou sur le choix du modèle de bruit. Ces choix sont détaillés sur des exemples synthétiques, sur des mammographies et sur des images naturelles.

Les modèles a contrario que l'on étudie sont donnés sous la forme de mélanges paramétriques de deux termes : un terme uniforme et un terme "gaussien", modélisant le fait qu'une partie des structures est naturellement convergente. Pour ces différents types de modèles nous proposons d'estimer leurs paramètres. Le point de convergence globale est estimé par minimisation du nombre de fausses alarmes, et l'estimation des autres paramètres est faite par maximisation de la log-vraisemblance. Les modèles estimés sont ensuite testés en tant que modèles a contrario pour la détection des convergences et les résultats sont comparés à ceux que donnait le modèle uniforme.

Mots clés : détection de convergences, méthode a contrario, lésions stellaires.

Abstract :

This thesis deals with the detection of points of convergences in images, in an a contrario framework. This is a preliminar work which studies various alterations of the a contrario framework such as the naive model. An application in the medical field is the detection of stellate lesions in mammograms, which are highly suspicious signs of breast cancer and are characterized by a radiating pattern of spicules with a bright center.

There are plenty of work regarding stellate lesions and architectural distortions. Most of them are based on the extraction of local features such as the gradient orientation, or the pixel orientation and more generally statistics of the orientation histogram. These features are then used in a classifier to assign to each pixel its probability of malignancy.

The a contrario methods sets a different framework for the detection of geometric structures in images. A naive model on line structures is defined and is often chosen as the uniform model, which is not well suited for mammograms where there is a privileged orientation of spicules.

We propose in this thesis an anisotropic a contrario framework for a better description of the normal distribution of spicules in a mammogram. The designed models describe the convergence of some of the line structures to a single point. They either concern the lines or the line segments of an image wether we detect global or local convergences. In the last case we explore several definitions of the number of false alarms and several a contrario models on synthetic, natural images and mammograms. We give the a contrario models as two terms mixtures, one uniform and the other of Gaussian type. These are parametric models and we propose an algorithm to estimate their parameters (the point of convergence is estimated with an a contrario method and the other parameters are approached by maximization of the likelihood). The resulting models are used as a contrario models and the results are compared with those against the uniform model.

Keywords : points of convergence in images, stellate lesions, a contrario methods, stochastic geometry.
